Nombres complexes

Définition - Propriétés

- Un nombre complexe z s'écrit de façon unique sous la forme $a + bi$; $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$
- On dit que a + bi est la forme algébrique du nombre complexe z.
  a est la partie réelle de z, on note $a = \mathrm{Re}(z)$
  b est la partie imaginaire de z, on note $b = \mathrm{Im}(z)$.

- Le nombre complexe i est tel que $\boxed{i^2 = -1}$

- Les complexes de la forme bi avec $b \in \mathbb{R}$, sont appelés imaginaires purs.

- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Equation du second degré à coefficient réels

L'équation $a.z^2 + b.z + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation

- si $\Delta > 0$, les deux solutions sont réelles z_1 et z_2.
- si $\Delta < 0$, on peut écrire $\Delta = (i\delta)^2$ avec $\delta \in \mathbb{R}$,

les deux solutions sont alors des nombres complexes, (conjugués l'un de l'autre) : $z_1 = \frac{-b - i\delta}{2a}$; $z_2 = \frac{-b + i\delta}{2a}$

- Le trinôme $az^2 + bz + c$ se factorise sous la forme $a(z - z_1)(z - z_2)$

Représentation géométrique d'un nombre complexe

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, au nombre complexe $z = a + b$i , on peut associer le point M(a ; b) ou le vecteur $\vec{v}$(a ; b).

- L'axe des **abscisses** est appelé l'axe des **réels**
- L'axe des **ordonnées** est appelé l'axe des **imaginaires**.
- $z = a + b$i est **l'affixe** de M et de $\vec{v}$.
- M(a ; b) est **l'image** ponctuelle, $\vec{v}$(a ; b) est l'image vectorielle de $z = a + b$i.

Si M a pour affixe $z = a + b$i et si M' a pour affixe $z' = a' + b'$i , alors

le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)$i

- le milieu I de [MM'] a pour affixe $z_I = \frac{z + z'}{2}$

- le barycentre G de (M ; α) et (M' ; β) a pour affixe $z_G = \frac{az + bz'}{a + b}$ $(\alpha + \beta \# 0)$.

Module et conjugué d'un nombre complexe

• On appelle module du nombre complexe $z = a + bi$, a ∈ ℝ , b ∈ ℝ, le réel positif

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

<u>Proriétés</u> : $|z| = 0 \iff z = 0$; $|-z| = |z|$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$|zz'| = |z|.|z'|$; $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

• On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + bi$, a ∈ ℝ , b ∈ ℝ, le nombre complexe

$$\boxed{\bar{z} = \boldsymbol{a - ib}}$$

$z.\bar{z} = a^2 + b^2$

<u>Proriétés</u> : $\bar{\bar{z}} = z$; $|\bar{z}| = |z|$; Si $z \# 0$ $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$z.\bar{z} = |z|^2$ (donc $z.\bar{z}$ est un réel positif)

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z}.\bar{z'}$

Si $z' \# 0$ $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

$\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$; $\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

z est réel $\iff z = \bar{z}$; z est imaginaire pur $\iff z = -\bar{z}$

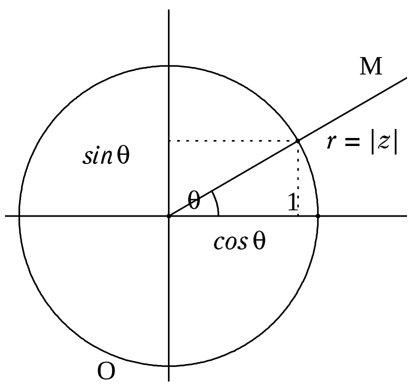
Si M a pour affixe z et si M' a pour affixe z' alors OM = |z| et MM' = |z' - z|
Si $\vec{u}$ a pour affixe z , alors $\|\vec{u}\| = |z|$.

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :

$\boxed{z = r.(\cos\theta + i\sin\theta)}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$

C'est la forme trigonométrique de z.
r est le module de z, r = |z|
θ est un argument de z.



Si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors

- $\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

et

- $-z = r(\cos(\theta + \pi) + i\sin(\theta + \pi))$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

Argument d'un nombre complexe

L'argument d'un nombre complexe z n'est pas unique, il est défini modulo 2π.
Si θ est un argument de z, on notera $\arg z = \theta\ [2\pi]$ ou $\arg z = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
On appelle argument principal de z l'argument de z appartenant à $]-\pi ; \pi]$.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}^*$, on a $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg z = \arg z' \quad [2\pi] \end{cases}$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z'
On a alors $(\vec{I},\vec{u}) = \arg z \quad [2\pi]$
$(\vec{u},\vec{u'}) = \arg z' - \arg z \quad [2\pi]$

z et z' étant deux nombres complexes non nuls on a :

- $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \quad [2\pi]$; $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \quad [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad [2\pi]$; $\arg(z^n) = n \arg z \quad [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg z \quad [2\pi]$; $\arg(-z) = \arg z + \pi \quad [2\pi]$

Formule de MOIVRE : pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

Notation exponentielle

On note $\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$ et $\boxed{r.(\cos\theta + i\sin\theta) = r.e^{i\theta}}$

$e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

Formule de MOIVRE : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Formules d'EULER :

$$\boxed{\begin{cases} \cos q = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin q = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}}$$

(L'utilisation des formules d'Euler permet de linéariser les polynômes trigonométriques)

Utilisation en géométrie

La notion de distance correspond au module - La notion d'angle à l'argument.

A, B et C étant trois points distincts d'affixes z_A, z_B et z_C dans $(O;\vec{I},\vec{J})$, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$,
- **AB =** $\boldsymbol{|z_B - z_A|}$
- l'angle $(\vec{I}, \overrightarrow{AB})$ a pour mesure $\arg(z_B - z_A)$ $[2\pi]$
- **l'angle (** $\overrightarrow{AB}$ **,** $\overrightarrow{AC}$ **)** a pour mesure $\arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\dfrac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right)$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$
  $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$ $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0$ $[\pi]$

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = 0$
  $\Leftrightarrow$ $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur non nul $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ $[\pi]$

Nombres Complexes et Transformation

<u>Translation</u> : soit une translation de vecteur $\overrightarrow{U}$ d'affixe *a* ; le point M (d'affixe z) est transformé en un point M' (d'affixe z') tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{U}$ donc z' - z = *a* d'où **l'expression complexe d'une translation est : z' = z + *a*** ; où *a* est l'affixe du vecteur de translation.

<u>Homothétie</u> : soit une homothétie de rapport *k* et de centre Ω d'affixe ω ; le point M (d'affixe z) est transformé en un point M' (d'affixe z') tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ donc $z' - \omega = k(z - \omega)$
d'où **l'expression complexe d'une homothétie est : $z' - \omega = k(z - \omega)$** ;
où ω est l'affixe du centre et *k* le rapport de cette homothétie.

<u>Rotation</u> : soit une rotation d'angle θ et de centre Ω d'affixe ω ; le point M (d'affixe z) est transformé en un point M' (affixe z') tel que : l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$ donc $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$
d'où **l'expression complexe d'une rotation est : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$** ;
où ω est l'affixe du centre et θ l'angle de cette rotation.

L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z.e^{i\theta}$
où θ est un nombre réel fixé, est la rotation de centre O et d'angle θ.

• Le cercle de centre A d'affixe z_A et de rayon r est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant : $|z - z_A| = r$