

Répétition d'algèbre

Prérequis : algèbre du secondaire I

Requis pour : tout

I. Factorisation

Pour les personnes âgées

Les formules de droite s'obtiennent à partir des formules de gauche en remplaçant b par $(-b)$. Essayez !

Exemple

$$x^2 + 11x + 28 = (x+4)(x+7)$$

On a tâtonné ainsi :

$$28 = 1 \cdot 28 \text{ mais } 1+28 \neq 11$$

$$28 = 2 \cdot 14 \text{ mais } 2+14 \neq 11$$

$$28 = 4 \cdot 7 \text{ et } 4+7 = 11$$

Exercice 1

Réponses

a. $7a(1-a+b)$

b. $(2a+1)(2a-1)$

c. $(a-2)(a^2+2a+4)$

d. $(a-b)(x-3)$

e. $(x+3)(x+2)$

f. $(a-1)(a+1)(a+2)$

g. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

h. $(a^2-b^2)^2$

i. $(a+b)(2+a+b)(2-a-b)$

j. $3(x+2)(x-8)$

k. $(x+4)(x-7)$

l. $(1-xy)(1+xy)$

m. $(2a^2-1)(4a^4+2a^2+1)$

n. $(a+b+x)(a+b-x)$

o. $x(x+3)(x-2)$

p. $(a+1)(a^2-4a+7)$

Mise en évidence

On met en évidence les symboles apparaissant dans plusieurs termes. En effet, $ab + ac = a(b+c)$. **Les parenthèses ne sont pas facultatives**, car la multiplication prime sur l'addition. Dans l'exemple suivant, on peut mettre « 3 » en évidence :

$$3x + 3y + 6z + t = 3(x+y+2z) + t$$

Formules remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

Remarque : Il faut aussi savoir utiliser ces formules « à l'envers » !

Factorisation

Factoriser un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 revient à l'écrire sous la forme d'un **produit** de facteurs.

Pour vérifier une factorisation, il suffit de développer le produit écrit au deuxième membre et de voir si l'on retrouve le premier membre.

On a souvent à factoriser des polynômes du second degré :

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

Il faut donc trouver (par tâtonnement) deux nombres a et b dont la somme correspond au deuxième terme et le produit au troisième terme. Il est plus facile de commencer le tâtonnement par le produit.

Décomposez en facteurs :

Effectuez :

a. $7a + 7ab - 7a^2$

q. $3 \cdot 2 + 1$

b. $4a^2 - 1$

r. $3(2+1)$

c. $a^3 - 8$

s. $4 + 3 \cdot 2$

d. $x(a-b) + 3(b-a)$

t. $(4+3) \cdot 2$

e. $x^2 + 5x + 6$

u. $3 + 4 \cdot 3 - 6 \cdot 2$

f. $a^3 - a + 2a^2 - 2$

v. $(3+6) - 5 \cdot 2 + 9 - 4(2+5)$

g. $(x^2-1)^2 - 3(x^2-1)$

w. $2 + 3 \cdot 5^2$

h. $a^4 + b^4 - 2a^2b^2$

i. $(-a-b)^3 + 4(a+b)$

Supprimez les parenthèses inutiles :

j. $3x^2 - 18x - 48$

x. $(4 \cdot x) + 5(2+x)$

k. $x^2 - 3x - 28$

y. $(x+2)(x-1) + (3 \cdot x) - (x+2)$

l. $1 - x^2y^2$

z. $(x-3)^2 \cdot (x-4) + (x+2)^3$

m. $8a^6 - 1$

n. $a^2 + 2ab - x^2 + b^2$

o. $x^3 + x^2 - 6x$

p*. $a^3 - 3a^2 + 7 + 3a$

Rappel

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \quad \frac{-a}{-b}$$

Exemple :
$$-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} \quad \frac{-3}{-4}$$

Exercice 2

Réponses

a. $\frac{3a^4}{2c^4}$ b. $\frac{5}{7}$
c. $\frac{1+b}{2b}$ d. $b-a$
e. $-\frac{a^2+a+1}{(1-a)^2}$ f. $\frac{1+a}{b}$
g. a^n h. $\frac{x-3}{x-2}$

Simplifiez les fractions suivantes :

a. $\frac{6a^6b^2c}{4a^2b^2c^5}$ b. $\frac{5a+5b}{7a+7b}$
c. $\frac{a+ab}{2ab}$ d. $\frac{(a-b)^2}{b-a}$
e. $\frac{a^3-1}{(1-a)^3}$ f. $\frac{1+a^3+3a^2+3a}{a^2b+2ab+b}$
g. $\frac{a^{4n}-a^{3n}}{a^{3n}-a^{2n}}$ h. $\frac{x^2+9-6x}{x^2-5x+6}$

Exercice 3

Réponses

a. $\frac{5a}{6}$ b. $\frac{14a}{15}$
c. $\frac{4-a^2}{2a}$ d. $\frac{a+b}{ab}$
e. $\frac{5x}{(x+2)(x-3)}$ f. $\frac{1}{b-a}$
g. $\frac{1}{2+a}$ h. $\frac{x}{x-1}$
i. $\frac{x+3}{(x-3)(x+2)}$ j. $\frac{1-4x}{2x^3}$
k. $\frac{b-a}{a^2-ab+b^2}$ l. $\frac{1}{x^{n-1}}$

Effectuez :

a. $\frac{a}{2} + \frac{a}{3}$ b. $\frac{a}{3} - \frac{2a}{5} + a$
c. $\frac{2}{a} - \frac{a}{2}$ d. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
e. $\frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-3}$ f. $\frac{1}{a+b} - \frac{2a}{a^2-b^2}$
g. $\frac{2}{a+2} + \frac{1}{2-a} - \frac{4}{4-a^2}$ h. $1 + \frac{3}{x-3} - \frac{2x}{(x-3)(x-1)}$
i. $\frac{1}{x^2-x-6} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2-5x+6}$ j. $\frac{4}{x} - \frac{2-x}{x^2} + \frac{1-10x^2}{2x^3}$
k. $\frac{a-b}{a^2-b^2} - \frac{3a^2}{a^3+b^3} + \frac{a}{a^2-ab+b^2}$ l. $\frac{x(1+y)}{x^n} + \frac{x-y}{x^{n-1}} - \frac{1}{x^{n-2}}$

Exercice 4

Réponses

a. $\frac{2b^2}{3}$ b. $\frac{ab(a-b)}{a+b}$
c. 1 d. $\frac{a^2c}{2b}$

Effectuez :

a. $\frac{3ab}{-5c} - \frac{20b^3c^2}{9a^2} - \frac{-a}{2b^2c}$ b. $\frac{a^2-b^2}{a} - \frac{a^2b}{a^2+2ab+b^2}$
c. $\frac{a^3-b^3}{ac+bc} - \frac{-c}{a^2+ab+b^2} - \frac{(a+b)^2}{b^2-a^2}$ d. $\frac{5a^2b}{\frac{c}{10b^2} - \frac{1}{c^2}}$

Exercice 5

Réponses

a. $x^2(x+1)$ b. $x-1$
c. $\frac{x-1}{x^2}$ d. $-\frac{b}{a}$

Effectuez :

a. $\frac{\frac{1}{x} + x + 2}{\frac{1}{x^2}} - \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^3}}$ b. $\frac{1+x^2}{x} - 2 - \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$
c. $\frac{1-x+x^2 - \frac{x^3}{x+1}}{1 + \frac{1}{x^2-1}}$ d. $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}$