Primitives et intégrales

1 DEFINITION, PROPRIETES

Def : F est une primitive de f sur l'intervalle I, si et seulement si
F est dérivable sur I et si, pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

Prop 1 : Si F est une primitive de f alors, pour toute constante k, $F + k$ est une autre primitive de f.

Prop 2 : Si F et G sont deux primitives de f sur I alors $F = G + k$.

Prop 3 : (Théorème d'existence) Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

2 PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES

2.1 Fonctions de bases

Il s'agit en fait d'une lecture inverse du tableau des dérivées.

Ensemble de définition	Fonction	Primitive
$\mathbb{R}$	k	$kx+c$
$\mathbb{R}$	$x^n\ (n\geq 1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^n}(n\geq 1)$	$-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}+c$
$\mathbb{R}^{*+}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}+c$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x+c$
$\mathbb{R}$	$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x+c$
$\mathbb{R}$	$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
$\mathbb{R}-\left\{\frac{p}{2}+kp, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x+c$

2.2 Propriétés de calcul

Si f a pour primitive F sur I et si g a pour primitive G sur I
alors $k.f$ a pour primitive $k.F$
$f + g$ a pour primitive $F + G$.

rem : On ne peut rien dire pour le produit ou le quotient

2.3 Fonctions composées

Fonction	Primitive
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a}F(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$

2.4 Lien dérivées primitives

Dérivées	Primitives
$n \geq 1$ u^n a pour dérivée $n.u'.u^{n-1}$	$u^n.u'$ a pour primitives $\frac{u^{n+1}}{n+1} + c$
$n \geq 1$ $\frac{1}{v^n}$ a pour dérivée $-\frac{n.v'}{v^{n+1}}$	$-\frac{v'}{v^n}$ a pour primitives $-\frac{1}{(n-1).v^{n-1}} + c$
$\sqrt{u}$ a pour dérivée $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ a pour primitives $\sqrt{u} + c$

3 *INTEGRALE*

Def : Si la fonction f est continue sur I , la quantité $F(b) - F(a)$ est indépendante de la primitive F de f choisie. On l'appelle l'intégrale de f prise entre les valeurs a et b et on la note $\int_a^b f(x)dx$ qui se lit *" Somme de a à b de f(x)dx ".*

Notation : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

Prop :

1. $\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

4 CALCUL INTEGRAL, PROPRIETES

4.1 Positivité : Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

4.2 Intégration d'une inégalité : Si pour tout $x \in [a;b]$ on a $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

4.3 Inégalités de la moyenne : Si $m \leq f \leq M$ et $a \leq b$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Si $|f| \leq k$ et $a \leq b$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq k|b-a|$

4.4 Valeur moyenne d'une fonction : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$ alors on appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a;b]$ la quantité $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

4.5 Intégration par parties

Si u et v sont dérivables sur $[a;b]$ alors $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

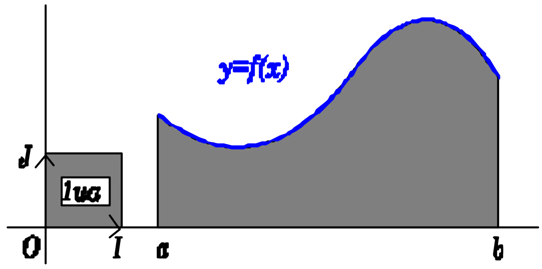
Applications du calcul intégral

1. AIRES

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.
L'unité d'aire sera $OI \times OJ$, aire du rectangle ayant pour côtés les segments $[OI]$ et $[OJ]$.

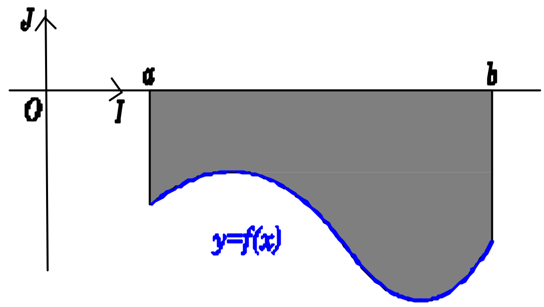
Th 1 : Soit f une fonction dérivable et positive sur l'intervalle $[a, b]$ et (E) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

$a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ alors $A(E) = \int_a^b f(x).dx$

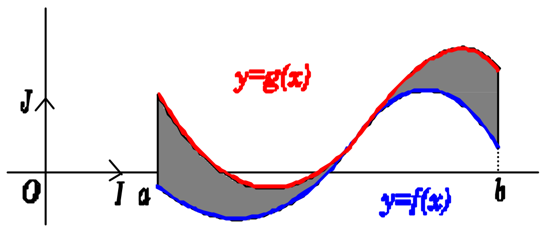


Th 2 : Soit f une fonction dérivable et négative sur l'intervalle $[a, b]$ et (E) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que

$a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$ alors $A(E) = -\int_a^b f(x).dx$

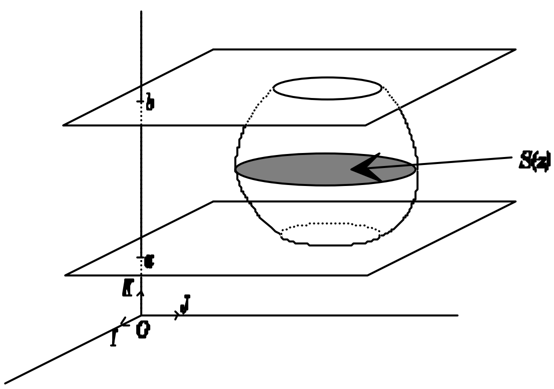


Th 3 : Soit f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a, b]$ vérifiant $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de$[a, b]$ et (E) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$ alors $A(E) = -\int_a^b [\,g(x) - f(x)]dx$.



2. CALCUL DE VOLUMES

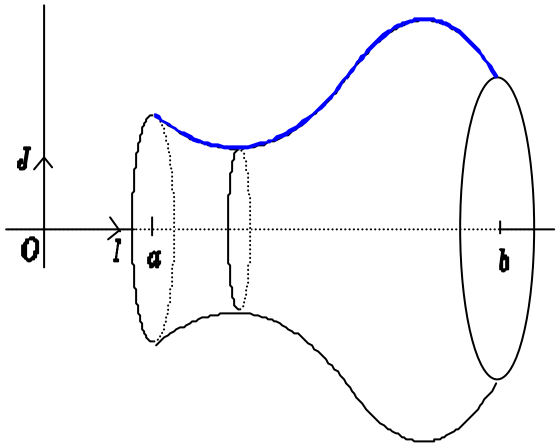
L'espace est rapporté à un repère orthogonal$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$. L'unité de volume sera $OI \times OJ \times OK$, volume du parallélépipède ayant pour côtés les segments $[OI]$, $[OJ]$ et$[OK]$.



Th 4 : On suppose que la section du domaine D de l'espace par un plan (P) parallèle à xOy de cote z a une aire $S(z)$ connue qui soit une fonction dérivable de z alors le volume du domaine D compris entre les plans de cotes respectives a et b est $V(D) = \int_a^b S(z).dz$

Rem : On obtient des résultats analogues avec des plans parallèles à yOz ou parallèles à xOy.

Cas particulier du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses d'un domaine limité par une courbe $y = f(x)$.



Th 5 : Soit f une fonction dérivable et positive sur l'intervalle $[a, b]$ et (E) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$ alors le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses par le domaine (E) est

$$V(E) = p\int_a^b [f(x)]^2 dx$$