. Dérivée .

Nombre Dérivé :

f est dérivable en x_0 lorsque $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ est un nombre réel.

Cette limite est le nombre dérivé en x_0, on le note $f'(x_0)$

On a alors $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Fonction Dérivée :

Si une fonction f est dérivable en tout point x_0 d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I, et l'application qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f au point x est appelée fonction dérivée de f. La fonction dérivée de f est notée f'.

Tangente. Approximation affine locale :

La courbe représentative de f a pour tangente en $M_0(x_0 ; f(x_0))$, la droite T de coef. directeur $f'(x_0)$.

$$\boxed{\text{T a pour équation } y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

- Si f est dérivable en x de I, alors il existe une fonction ε telle que, pour tout réel h tel que $x + h$ soit dans I, on ait : $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$, avec $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

- **Localement**, on peut remplacer la fonction f par la fonction affine représentée par la tangente T, c'est à dire qu'on peut remplacer $f(a + h)$ par $f(a) + hf'(a)$ lorsque h est voisin de zéro.

La distance MP mesure la valeur absolue de l'erreur commise en remplaçant $f(a + h)$ par $f(a) + hf'(a)$.

On dit alors que $f(a) + hf'(a)$ est l'approximation affine locale de $f(a + h)$.

Ecriture Différentielle :

- En posant $\Delta x = (x + h) - x$ et $\Delta y = f(x + h) - f(x)$
- $f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$ s'écrit : $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)$ avec $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$
- D'où l'approximation $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$

  Cette approximation conduit à l'écriture symbolique : $dy = f'(x)\,dx$
- **$dy = f'(x)\,dx$ est l'écriture différentielle ; on note aussi $f' = \dfrac{df}{dx}$.**

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- u + v dérivables sur I, on a : $(u + v) = u' + v'$
- u et v dérivables sur I, on a : $(u.v)' = u'.v + u.v'$
- Si $a \in \mathbb{R}$, u est dérivable sur I, on a : $(a.u)' = a.u'$
- Si u ne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable : $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$
- Si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$
- Si u est strictement positive sur I, on a : $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Si u et u^n sont dérivables sur I, on a : $(u^n)' = n.\, u'.\, u^{n-1}$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I,
si v est une fonction dérivable sur un intervalle J, et si pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$,
alors $v \circ u$ est dérivable sur I et on a $\boldsymbol{(v \circ u)' = u' \,.\, (v' \circ u)}$

Applications aux variations d'une fonction :

Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I,

- Si *f* ' est nulle sur I, alors *f* est constante sur I.
- Si *f* ' est positive ou nulle sur I, alors *f* est croissante sur I.
- Si *f* ' est négative ou nulle sur I, alors *f* est décroissante sur I.

- Pour démontrer qu'une fonction *f* est **strictement croissante** sur I, il suffit de démontrer que *f* est dérivable sur I et que sa dérivée *f'* est strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points.

(Propriété similaire pour une fonction strictement décroissante)

Inégalité des accroissements finis :

> Soit *f* une fonction dérivable sur $[a ; b]$ (avec $a < b$), s'il existe deux réels m et M tels que pour tout x de $[a ; b]$, on ait : $m \le f'(x) \le M$ alors $m(b - a) \le f(b) - f(a) \le M(b - a)$

Cas particulier : s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in [a ; b]$, on ait :
$|f'(x)| \le M$, alors on a $|f(b) - f(a)| \le M\,|b - a|$

Compléments :

- Si $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ est un nombre réel A, on dit que la fonction *f* est dérivable à droite en x_0 et que A est le nombre dérivé à droite de *f* en x_0.

La courbe représentative de *f* a alors une demi-tangente de coefficient directeur A en $M_0(x_0 ; f(x_0))$
(Propriété similaire avec une limite à gauche et un nombre dérivé à gauche)

- Pour qu'une fonction *f* soit dérivable en x_0, il faut qu'elle soit dérivable à gauche et à droite en x_0 et que les nombres dérivés à gauche et à droite soient égaux.