FIABILITÉ

Introduction

- La notion de contrôle de la qualité de fabrication correspond à l'étude de la capacité d'un matériel à répondre aux exigences du client, du catalogue, du cahier des charges, etc… au moment de la sortie de fabrication ou au cours de celle-ci.
- Mais il faut également étudier les conditions dans lesquelles ce matériel conserve ces qualités en fonction du temps . C'est l'objet de l'étude de la fiabilité.

La fiabilité est la probabilité qu'un équipement fonctionne sans défaillance pendant une période de temps déterminée dans des conditions opérationnelles spécifiées.

Généralités

Fonction de fiabilité : $t \quad R\ t \quad t \geq 0$

$R\ t$: **Probabilité pour que l'équipement fonctionne encore à l'instant t** (ou **probabilité pour que la première défaillance se produise après l'instant t**

Soit la variable aléatoire continue T : instant de la première défaillance, on a :

$$R\ t \quad p\ T \geq t$$

Fonction de répartition : $t \quad F\ t$

La fonction de répartition de la v.a. T est définie par :

$$F\ t \quad p\ T \leq t \quad 1 - R\ t\ , \quad t \geq 0$$

$F\ t$ **est la probabilité pour que la première défaillance se produisent avant l'instant t**

Fonction densité de probabilité de défaillance : $t \quad f\ t$

Conformément aux définitions du calcul des probabilités :

$$f\ t \quad F'\ t$$

donc :

$$F\ t \quad {}_0^t f\ u\ du$$

La fonction densité de probabilité caractèrise, de manière instantanée, la variation de la fiabilité de l'équipement.

Estimateurs Statistiques de $R\ t$, $F\ t$ et $f\ t$

Soit, à $t \quad 0$ la mise en service de N_0 appareils

Soit, à l'instant t, le nombre d'appareils encore en état de fonctionner : N_t

Soit le nombre d'appareils ayant eu une défaillance avant l'instant t : n_t

$$n_t \quad N_0 - N_t$$

on considère qu'un appareil ayant eu une défaillance n'est ni réparé ni remplacé)

Par définition même de la probabilité d'un événement, on a :

$$R\ t \quad \frac{N_t}{N_0}$$

d'où :

$$F\ t \quad 1 - \frac{N_t}{N_0} \quad \frac{n_t}{N_0}$$

Considérons la variation de F à l'instant $t \quad \Delta t$:

$$\Delta F \quad F\ t \quad \Delta t\ - F\ t \quad \left(1 - \frac{N_{t\ \Delta t}}{N_0}\right) - \left(1 - \frac{N_t}{N_0}\right) \quad \frac{N_t - N_{t\ \Delta t}}{N_0}$$

Le numérateur représente le nombre de défaillances s'étant produites dans l'intervalle $t, t \quad \Delta t$. Nous l'appellerons ΔN_t. Pour Δt suffisamment petit, on a :

$$f\ t \quad \frac{\Delta F}{\Delta t} \quad \frac{\Delta N_t}{N_0 \quad \Delta t}$$

f t est la fréquence de défaillance rapportée à l'unité de temps

à $t \quad 0,$ 200 appareils ont été mis à l'essai (dans des conditions identiques)

à $t \quad 6,$ 170 appareils sont encore en état de marche.

Entre les instants $t \quad 6$ et $t \quad 8$ il y a eu 14 défaillances.

- On a :

$$R\ 6 \quad \frac{170}{200} \quad 0,85,\ F\ 6 \quad 0,15$$

$$R\ 8 \quad \frac{156}{200} \quad 0,78,\ F\ 8 \quad 0,22$$

Entre $t \quad 6$ et $t \quad 8,\ \Delta F \quad 0,07$ et $\frac{\Delta F}{\Delta t} \quad 0,035$ fréquence de défaillance par unité de temps.

Taux de défaillance (Taux d'avaries)

On cherche sur un intervalle de temps donné, la fréquence de défaillances par unité de temps, non plus par rapport au nombre d'appareils mis en service, mais par rapport au nombre d'appareils encore en service au début de l'intervalle $t, t \quad \Delta t$. On définit donc le taux de défaillance, $Z\ t$, par :

$$Z\ t \quad \frac{\Delta N_t}{N_t \quad \Delta t}$$

Pour Δt suffisamment faible, on a :

$$Z\ t \quad \frac{f\ t}{R\ t}$$

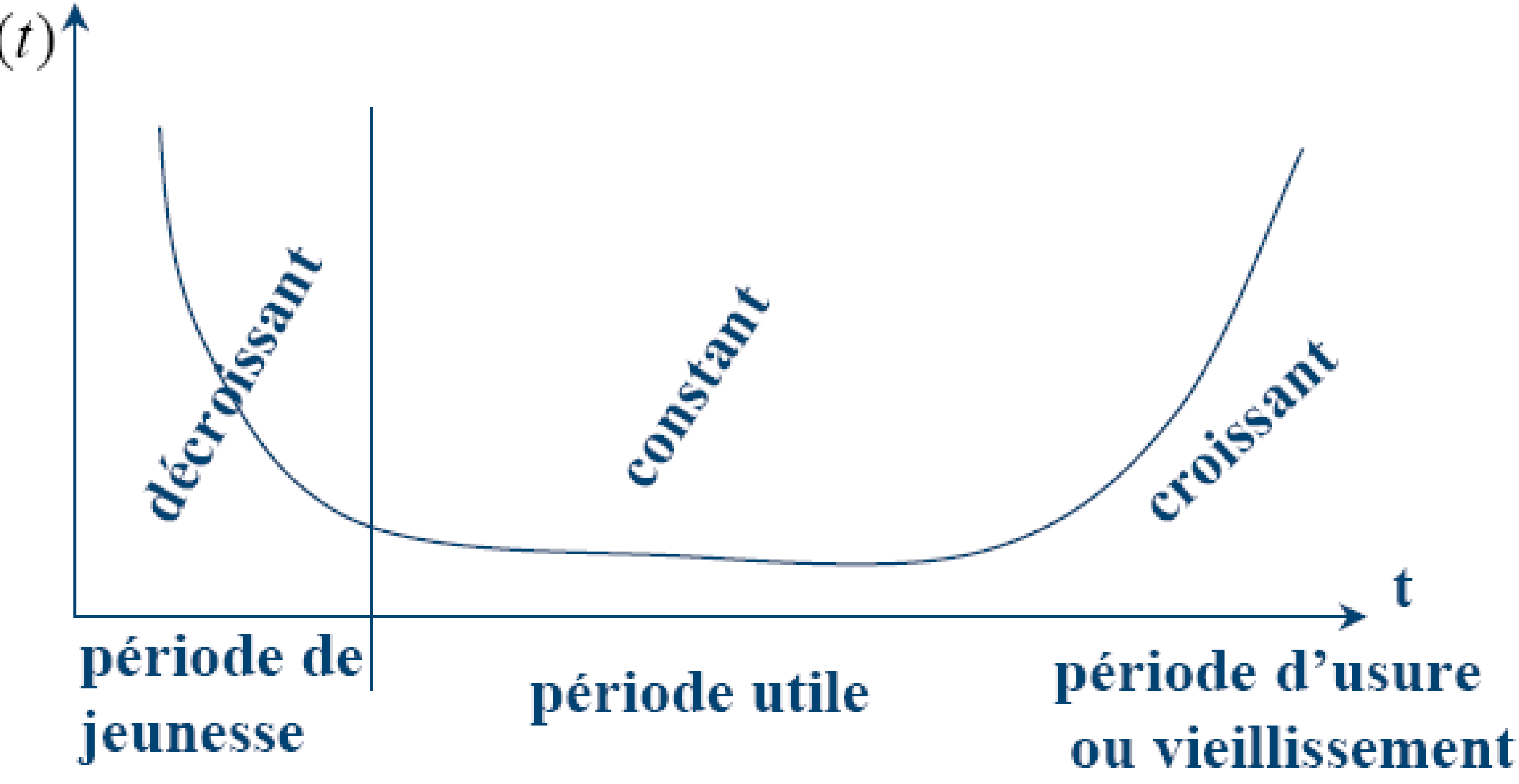
Allure générale de la courbe de $Z\ t$

D'une façon générale, on peut considérer trois périodes dans la vie d'un équipement :

- La période des avaries de jeunesse, dans laquelle Z est décroissante ;
- La période des avaries d'usure, dans laquelle Z est croissante ;
- Entre ces deux périodes on a Z sensiblement constante (le rapport ”appareils défaillants/appareils en service” varie très peu).

D'où la courbe schématique, dite ”courbe en baignoire” :

La courbe en baignoire : évolution de la défaillance au cours du temps



Loi Exponentielle

La loi exponentielle correspond à la période de fonctionnement normal (défaillances aléatoires) où $Z \; t$. On a :

$$Z \; t \qquad \frac{f \; t}{R \; t} \qquad F' \; t \qquad -R' \; t \qquad R \; t$$

D'où :

$$R \; t \qquad c \quad e^{- \;\; t}$$

$R \; 0 \qquad 1,$ par conséquent :

$$\boxed{R \; t \qquad e^{- \;\; t}}$$

d'où :

$$\left.\begin{array}{ll} F \; t & 1 - e^{- \;\; t} \\ f \; t & e^{- \;\; t} \\ Z \; t & \end{array}\right\}$$

Espérance Mathématique

T est la v.a. instant de la première défaillance.

$$E \; T \qquad {}_{0} \quad tf \; t \;\; dt \qquad {}_{0} \quad t \quad e^{- \;\; t} dt$$

$$E \; T \qquad \frac{1}{} \qquad vérifiez \; !!$$

$E \; T$, espérance mathématique de la v.a. T est donc la moyenne espérée du temps de bon fonctionnement de l'équipement : **MTBF** (Mean Time Between Failures)

Dans la mesure où l'on considère les défaillances comme irrémédiables, on peut aussi définir $E \; T$ comme "**durée de vie moyenne**".

Variance et Ecart-Type

On a :

$$V \; T \qquad E \; T^2 \;\; - E \; T \;\; {}^{2}$$

Le lecteur vérifiera que :

$$V \; T \qquad \frac{1}{\,{}^{2}}, \qquad {}_{T} \qquad \frac{1}{}$$

Un matériel électronique a une durée de vie moyenne de 3200 heures ; sa fiabilité suit une loi exponentielle.

Sa fonction de fiabilité est :

$$R\ t \quad e^{-\frac{t}{3200}}, \text{ puisque } E\ T \quad 3200 \quad \frac{1}{}$$

La probabilité pour qu'il fonctionne encore au bout de 200 heures est :

$$R\ 200 \quad e^{-\frac{200}{3200}} \quad 0{,}53$$

Loi de WEIBULL

Son origine est expérimentale. Elle est un modèle mathématique particulièrement adaptée à l'étude statistique des défaillances.

- **Fonction de Fiabilité** :

$$R\ t \quad e^{-\left(\frac{t-}{}\right)}$$

- **Fonction de répartition** :

$$F\ t \quad 1 - R\ t \quad 1 - e^{-\left(\frac{t-}{}\right)}$$

- **Densité de probabilité** :

$$f\ t \quad F'\ t \quad \frac{}{} \left(\frac{t-}{}\right) \quad e^{-\left(\frac{t-}{}\right)}$$

- **Taux de défaillance** :

$$Z\ t \quad \frac{f\ t}{R\ t} \quad \frac{}{} \left(\frac{t-}{}\right)$$

Signification des paramètres , ,

Rappel Soit C la courbe représentative de l'équation $y \quad f\ x$ (dans un repère $\left(O, i, j\right)$.

La courbe représentative de l'équation $y \quad f\ x - a$ correspond à la translation de vecteur ai de C.

Dans la loi de Weibull, positif correspond à une apparition retardée de la possibilité de défaillance (0 pas de sens physique).

On poursuit l'étude avec 0.

Le paramètre fait subir un changement d'échelle en abscisse (1 les abscisses sont dilatées). On poursuit avec 1.

Étude de la fonction de fiabilité :

$$t \quad R\ t \quad e^{-t} , \quad [R]$$

$$t \geq 0,\ R'\ t \quad - \ t^{\ -1} e^{-t} \ \leq 0$$

La fonction de fiabilité R est donc décroissante. On a :

$$0,\ \lim_{t \to} R\ t \quad 0\ et\ R\ 0 \quad 1$$

$$\lim_{t \to 0} R'\ t \quad \begin{cases} 0 \ \text{si} \quad 1 \\ -1 \ \text{si} \quad 1 \\ \quad \text{si } 0 \quad\quad 1 \end{cases}$$

Étude du taux de défaillance :

$$t \quad Z\ t \quad t^{\ -1}$$

On a :

$$Z'\ t \quad\quad -1\ t^{\ -2}$$

- Si 1,

$$Z\ 0 \quad 0 \ \text{et} \ \lim_{t \to} Z\ t$$

- Si 2,

$$Z'\ 0 \quad 0 \ \text{et} \ \lim_{t \to} Z'\ t$$

- Si 2,

$$Z' \quad Cste \ \text{et} \ Z\ t \quad 2t$$

- Si 1 2,

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t\ 0}} Z'\ t \quad\quad \text{et} \ \lim_{t \to} Z'\ t \quad 0$$

- Si 1,

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t\ 0}} Z\ t \quad 0 \ \text{et} \ \lim_{t \to} Z\ t \quad 0$$

- Si 1, on retrouve la loi exponentielle, dans le cas particulier 1

On constate que les défauts de jeunesse correspondent à 1 et les défauts d’usures à ≥ 2

Détermination des coefficients , et

La méthode la plus utilisée est la méthode graphique exposée ici. On a :

$$R\ t \quad e^{-\left(\frac{t-}{}\right)}$$

d’où :

$$\ln R\ t \quad -\left(\frac{t-}{}\right) \quad \text{soit : } \ln\left(\frac{1}{R\ t}\right) \quad \left(\frac{t-}{}\right)$$

$$\ln\left[\ln\left(\frac{1}{R\ t}\right)\right] \quad \ln\left(\frac{t-}{}\right) \quad \ln\ t- \quad -\ln$$

Dans le cas où 0

$$\ln\left[\ln\left(\frac{1}{R\ t}\right)\right] \quad \ln t- \quad \ln$$

Posons :

$$X \quad \ln t,\ \text{et } Y \quad \ln\left[\ln\left(\frac{1}{R\ t}\right)\right]$$

On obtient une fonction affine :

$$Y \quad X- \quad \ln$$

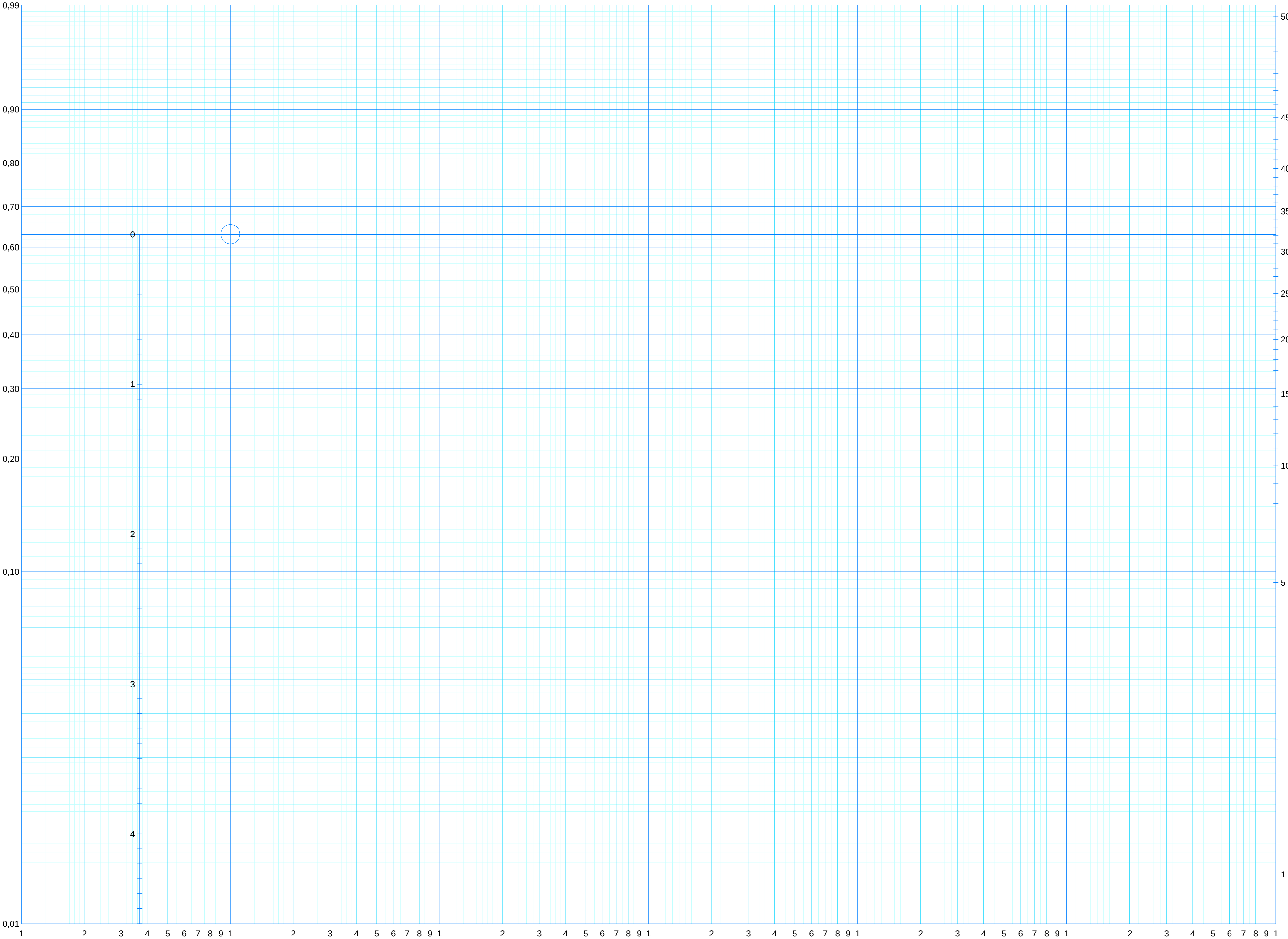
La méthode graphique consiste à utiliser un papier spécial, dit ”papier de Weibull”.

Si 0, les points $t, R\ t$ devront être alignés ; si ce n’est pas le cas (hors programme) il faudra tâtonner par changement d’origine en abscisse pour obtenir une droite.

Description du graphique de Weibull

En abscisse il est gradué en échelle logarithmique : $X \quad \ln t$. La graduation linéaire en X figure en bordure supérieure, la graduation en t en bordure inférieure.

En ordonnée, il est gradué en échelle : $Y \quad \ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-F\ t}\right)\right]$. La graduation en $F\ t$ figure en bordure gauche (en pourcentage) ; la graduation linéaire en Y (ou plus exactement en $-Y$) figure sur l’axe $X \quad -1$.


0,99
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,01
0
1
2
3
4
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1

$$Y \quad 0 \quad \ln\left(\frac{1}{1-F\ t}\right) \quad 1 \quad 1-F\ t \quad e^{-1} \quad F\ t \quad 63,2\%$$

$$X \quad 0 \quad \ln t \quad 0 \quad t \quad 1$$

Soit A le point d'intersection des droites $X \quad 0$ et $Y \quad 0.$

Représentation de $F\ t$

On représente les points $t, F\ t$ correspondant à l'observation statistique ; s'ils ne sont pas correctement alignés on trace la droite qui en sera la meilleure moyenne.

Détermination de

est le cefficient directeur de la droite Δ : $Y \quad X - \quad \ln$

En traçant la parallèle à Δ passant par $A,$ cette droite coupe l'abscisse $X \quad -1$ en un point d'ordonnée $-$. On lira grâce à la graduation en $-Y$

Détermination de

$Y \quad 0$ pour $X \quad \ln$, c'est-à-dire t .

est donc l'abscisse en t du point d'intersection de Δ avec $Y \quad 0,$ c'est-à-dire $F\ t \quad 63,2\%.$

Un relevé statistique des avaries d'un matériel aboutit au tableau ci-dessous :

t *heures*	482	568	721	902	1153	1415	1647
$F\ t$ %	10	15	25	40	60	80	90

$F\ t$ est la probabilité pour qu'un matériel soit tombé en avarie avant l'instant $t,$ donc en statistique le pourcentage d'appareils qui sont tombés en avarie avant l'instant $t.$

Les points sont alignés donc $\quad 0$

La parallèle à Δ passant par A coupe l'axe $X \quad -1$ à $\quad 2,5$

La droite Δ coupe $Y \quad 0$ au point 12, donc $\quad 1200$ (t exprimé en centaines d'heures)

La variable T suit donc la loi de fiabilité :

$$R\ t \quad e^{-\left(\frac{t}{1200}\right)^{2,5}}$$

Pour calculer simplement l'espérance et l'écart-type on utilise une table de Weibull qui à partir de donne A et $B,$ tels que :

$$\left.\begin{array}{l} E\ T \quad A \\ _T \quad B \end{array}\right\}$$

d'où pour $\quad 2,5$ on lit $A \quad 0,8873$ et $B \quad 0,380$; on a donc :

$$E\ T \quad 0,8873 \quad 1200 \quad 1065 \text{ heures}$$

$$_T \quad 0,380 \quad 1200 \quad 456 \text{ heures}$$

Estimation Statistique de la fonction de répartition pour les échantillons de petite

taille

On a vu que l'on estime $F\ \ t$ par $F\ \ t \qquad \frac{n_t}{N_0}$ où :

n_t : nombre d'appareils ayant eu une défaillance avant l'instant t

N_0 : nombre d'appareils à $t \qquad 0$

Quand tous les éléments de l'échantillon sont hors service, on devrait avoir $F\ \ t \qquad 1$, ce qui n'a de sens que pour la population entière. Dans les échantillons de grande taille l'inconvénient est mineur, mais pour les échantillons de petite taille il devient important. On a recours à deux méthodes pour y remédier :

- **Méthode des rangs médians** : On pose

$$F_i \qquad \frac{i - 0,3}{n \quad 0,4}$$

- **Méthode des rangs moyens** :

$$F_i \qquad \frac{i}{n \quad 1}$$

Essai de 9 appareils. Tableau de durée de vie.

N d'ordre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Durée de vie	152	205	310	405	501	572	657	785	912

Le 3ème appareil ayant vécu 310 heures, on aurait normalement $F\ \ 310 \qquad \frac{3}{9}$. Par la méthode des rangs moyens, on aura $F\ \ 310 \qquad 0,3 \qquad 30\%$. D'où la fonction de répartition :

t	152	205	310	405	501	572	657	785	912
$F\ \ t\ \ \%$	10	20	30	40	50	60	70	80	90

Fiabilité d'un Ensemble

Généralités

Considérons un ensemble E composé de n sous-ensembles $S_1, S_2, \ldots, S_n$. On peut définir deux manières de grouper ces sous-ensembles : en série ou en parallèle.

- Groupement en série :

- Groupement en parallèle :

Des sous-ensembles sont groupés **en série**, **en matière de fiabilité**, si le fonctionnement de **chacun est nécessaire** pour que le système fonctionne. Ils sont **en**

parallèle si le fonctionnement de **l'un quelconque** d'entre eux **suffit** pour que le système fonctionne (ne pas faire l'analogie avec l'électricité : un circuit RC parallèle fonctionne si la résistance et le condensateur fonctionne c'est donc **au sens de la fiabilité** un système série !)

Fiabilité d'un ensemble série

A un instant t donné, l'ensemble ne fonctionne que **si chacun de ses composants** fonctionne. Si on admet qu'une avarie sur un composant n'affecte pas les autre, on pourra considérer que les événements "le sous-ensemble S_i est en état" (S_i sont indépendants. Alors :

$$p\ E \quad p\ S_1 \quad p\ S_2 \quad p\ S_n$$

d'où :

$$R_E\ t \quad R_{S_1}\ t \quad R_{S_2}\ t \quad R_{S_n}\ t$$

La fiabilité de l'ensemble est égale au

produit des fiabilités élémentaires

Plus l'ensemble série est important et plus la fiabilité est faible. Dans le cas la loi exponentielle on obtient :

$$R\ t \quad e^{-\ _1 t} \quad e^{-\ _2 t} \quad e^{-\ _n t} \quad e^{-\left(\sum\ _i\right)t}$$

Le système suit aussi une loi exponentielle, avec un taux de défaillance $\sum\ _i$
Un système de contrôle électronique de haute sécurité comprend 1250 composants indispensables dont la fiabilité suit une loi exponentielle de taux de défaillance $_i \quad 10^{-5}$ (l'unité de temps est l'heure)

La loi suivie par le système : Pour chaque composant on a $R_{S_i}\ t \quad e^{-\ _i t}$, d'où :

$$R\ t \quad \prod_{i\ 1}^{1250} e^{-\ _i t} \quad e^{-\left(\sum_{i\ 1}^{1250}\ _i\right)t} \quad e^{-1{,}25\ 10^{-2} t}$$

La probabilité pour le système de fonctionner 10 minutes sera :

$$R\left(\frac{1}{6}\right) \quad 0{,}998$$

Le risque envisageable pour fonctionner 10 minutes ne doit pas dépasser 0,1%. Quel doit-être le nombre maximum de composants ?

$$e^{-\frac{n}{6}\ 10^{-5}} \quad 0{,}999$$

d'où :

$$n \leq 600$$

Fiabilité d'un ensemble parallèle

L'ensemble fonctionne si **au moins un** de ses sous-ensembles fonctionne. E fonctionne si S_1 ou S_2 ou … ou S_n fonctionnent. Mais les événements $S_1, S_2, \ldots, S_n$ n'étant pas incompatibles il est préférable de raisonner sur les défaillances. E est défaillant si S_1 et S_2 et … et S_n sont défaillants. En supposant qu'ils sont indépendants :

$$F_E(t) = F_{S_1}(t)\, F_{S_2}(t) \cdots F_{S_n}(t) \qquad R_E(t) = 1 - F_E(t)$$

Un circuit de commande doit être protégé contre les surintensités. Pour améliorer la sûreté de déclenchement, on dispose en série deux relais. Le système de protection fonctionnera si l'un ou l'autre se déclenche. C'est donc **sur le plan de la fiabilité**, un système parallèle. On estime que la fiabilité de chaque relais suit une loi exponentielle de MTBF 15000 heures

La fonction de fiabilité du système composé est :

- Pour chaque relais on a $\lambda_i = \frac{1}{15000} = \frac{2}{3}10^{-4},\ i = 1, 2$

$$F_i(t) = 1 - R_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$$

d'où :

$$F_E(t) = F_1(t)\,F_2(t) = \left(1 - e^{-\lambda_1 t}\right)\left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right) = \left(1 - e^{-\frac{2}{3}10^{-4}t}\right)^2$$

soit :

$$R_E(t) = 1 - F_E(t) = 2e^{-\frac{2}{3}10^{-4}t} - e^{-\frac{4}{3}10^{-4}t}$$

Calcul de l'espérance mathématique du système composé :

$$f(t) = F'_E(t) = \frac{4}{3}10^{-4}\left[e^{-\frac{2}{3}10^{-4}t} - e^{-\frac{4}{3}10^{-4}t}\right],\ \text{pour } t \geq 0$$

d'où :

$$E(T) = \int_0^{\infty} tf(t)\,dt = 22500 \text{ heures (vérifiez !)}$$