Résolution d’équations

Prérequis : calcul littéral ***Requis pour :*** tout

I. Équations du premier degré

Forme générale $ax + b = 0$ (a, b IR et $a \neq 0$)

Solution $x = -\dfrac{b}{a}$

Exercice 1

Réponses
a. –1/2 **b.** 12/25 **c.** –3/4 **d.** 4/5
e. IR **f.** -2/3 **g.** –

Résoudre les équations suivantes :

a. $2x + 1 = 0$ **b.** $\dfrac{5}{3}x - \dfrac{4}{5} = 0$ **c.** $-4x = 3$ **d.** $3x - 4 = -2x$

e. $4x = 4x$ **f.** $3 = -3x + 1$ **g.** $3x + 2 = 3x - 5$

Exercice 2

Réponses
a. 5.5 **b.** – **c.** 3
d. 6 **e.** 3 **f.** –5

Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{x-3}{x-5} = 5$ **b.** $\dfrac{x-3}{x-5} = 1$ **c.** $\dfrac{x-3}{x-5} = 0$

d. $\dfrac{x-5}{4} - \dfrac{x-5}{8} = \dfrac{1}{8}$ **e.** $\dfrac{5}{x+1} = \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{2}$ **f.** $\dfrac{1}{x-4} = \dfrac{1}{2x+1}$

Exercice 3

Réponses
a. 4 **b.** 3
c. IR **d.** $4a - b$

Résoudre les équations suivantes :

a. $5[3(2x - 1) + 7x] = 10(x + 20.5)$ **b.** $\dfrac{x+4}{3} - \dfrac{x-4}{5} - \dfrac{3x-1}{15} - 1 = 1$

c. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{3x}{4} - \dfrac{5(x-1)}{3} = \dfrac{20-5x}{12}$ **d.** $\dfrac{x-a}{2} - \dfrac{x-b}{3} = \dfrac{a+b}{6}$

II. Équations du second degré

Forme générale $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c IR et $a \neq 0$)

Solutions

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La valeur $\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** de l’équation.
Si $\Delta > 0$, l’équation a **deux solutions** réelles.
Si $\Delta = 0$, $x_1 = x_2$; l’équation a **une solution** réelle (solution double).
Si $\Delta < 0$, l’équation **n’a pas de solution** réelle.

Mohammed Al’Khwarizmi (788-850)

Factorisation

Si $\Delta \geq 0$, $ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2)$.
Si $\Delta < 0$, le polynôme n’est pas factorisable dans IR.

Dans le traité « Hisâb al-jabr wa’l-muqqâbala » (Science de la transposition et de la réduction) du mathématicien d’Asie centrale *Al’Khwarizmi*, les équations du second degré sont classées en six types et résolues. Il faut dire qu’à l’époque, les nombres négatifs étaient très mal maîtrisés.

Exercice 4

Pour quelle(s) valeur(s) de b l’équation $x^2 + bx - b + 3 = 0$ a-t-elle une seule solution ?

Exercice 5@

Réponses

a. 1 ; 2   **b.** 1 ; 4   **c.** –

d. –3   **e.** $\frac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$ **f.** $1 \pm \sqrt{13}$

g. –   **h.** $0 \; ; \; 2 - \sqrt{5}$

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 - 3x + 2 = 0$ **b.** $4 - 5x + x^2 = 0$ **c.** $x^2 - 4x = -5$

d. $x^2 + 6x + 9 = 0$ **e.** $2x^2 - 5x - 2 = 0$ **f.** $-\frac{x^2}{2} + x + 6 = 0$

g. $\sqrt{3}x^2 - 4x + 2\sqrt{3} = 0$ **h.** $x(x + \sqrt{5}) = 2x$

III. Équations bicarrées

Forme générale $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a, b, c$ IR et $a \neq 0)$

Solutions Poser $x^2 = y$ et substituer pour obtenir l'équation $ay^2 + by + c = 0$. Trouver les solutions y_1 et y_2 de cette équation intermédiaire comme indiqué au § II. Les solutions finales sont :

$x_1 = \sqrt{y_1}$ et $x_2 = -\sqrt{y_1}$ si y_1 existe dans IR et si $y_1 \geq 0$.

$x_3 = \sqrt{y_2}$ et $x_4 = -\sqrt{y_2}$ si y_2 existe dans IR et si $y_2 \geq 0$.

Si $x^2 = y$, alors $x = \pm\sqrt{y}$

(n'oubliez pas le ± !)

Exercice 6

Réponses

a. 2 ; –2 ; 1 ; –1   **b.** 1 ; –1

c. –   **d.** $\sqrt[3]{7} \; ; \; -\frac{1}{\sqrt[3]{7}}$

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ **b.** $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$ **c.** $4u^4 - 4u^2 + 3 = 0$

d. $7x^6 - 48x^3 - 7 = 0$

IV. Division de polynômes

Un polynôme est une combinaison linéaire de puissances entières et positives d'une variable :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Un polynôme de degré n a n racines, mais certaines peuvent être des nombres complexes.

Soit *P(x)* un **polynôme**. Le **degré** d'un polynôme est la valeur de l'exposant le plus grand (n).

On appelle **racine** d'un polynôme la valeur $x = a$ telle que $P(a) = 0$. Si a est une racine, *P(x)* est alors divisible par $(x - a)$ et le reste est nul. Si a n'est pas une racine, alors le reste n'est pas nul et la valeur numérique du reste est égale à *P(a)*.

Un polynôme de degré n peut avoir jusqu'à n racines réelles. Un polynôme de degré impair a **toujours au moins une** racine réelle.

Un exemple

Tartaglia (1499-1557)

Soit $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$. Ce polynôme est de degré 4, il y a donc quatre racines réelles au maximum, peut-être moins.

Divisons *P(x)* par $(x - 3)$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -7x^2 & +8x & +12 & x-3 \\ \cline{6-6}
x^4 & -3x^3 & & & & x^3 + x^2 - 4x - 4 \\
 & x^3 & -7x^2 & & & \\
 & x^3 & -3x^2 & & & \\
 & & -4x^2 & +8x & & \\
 & & -4x^2 & +12x & & \\
 & & & -4x & +12 & \\
 & & & -4x & +12 & \\
 & & & & 0 &
\end{array}$$

P(x) est divisible par $(x - 3)$ car le reste est nul. 3 est donc une racine, ce qu'on peut facilement vérifier en remplaçant x par 3 dans *P(x)*. *P(x)* peut alors se factoriser comme : $P(x) = (x - 3)(x^3 + x^2 - 4x - 4)$

Jérôme Cardan (1501-1576)

Essayons maintenant de diviser $P(x)$ par $(x – 1)$:

$$
\begin{array}{llllll|l}
x^4 & -2x^3 & -7x^2 & +8x & +12 & & \underline{\quad x-1 \quad} \\
x^4 & -x^3 & & & & & x^3 - x^2 - 8x \\
 & -x^3 & -7x^2 & & & & \\
 & -x^3 & +x^2 & & & & \\
 & & -8x^2 & +8x & & & \\
 & & -8x^2 & +8x & & & \\
 & & & & 12 & &
\end{array}
$$

On voit que $P(x)$ n’est pas divisible par $(x – 1)$, car le reste vaut 12. 1 n’est donc pas une racine.

D’autre part, on remarque que $P(1) = 12$.

V. Résolution d’équations de degré supérieur à 2

Les formules de résolution des équations de degrés 3 (trouvées par *Tartaglia*, puis généralisées et publiées par *Cardan*) et 4 sont compliquées et d’un emploi peu fréquent.
Il n’existe aucune formule générale pour la résolution des équations de degré supérieur à 4 (théorème d’*Abel*, 1826).

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Si on connaît une ou plusieurs racines d’un polynôme de degré supérieur à 2, on peut le **factoriser** et ainsi obtenir un produit de polynômes de degré inférieur. Si le plus grand degré de ces polynômes est 2 ou 1, alors on peut trouver les autres racines par les techniques vues précédemment.
Prenons $Q(x) = x^3 + x^2 – 4x – 4$, qui n’est autre que $P(x) / (x – 3)$ (voir § IV).
Par tâtonnement, on trouve que 2 est une racine de $Q(x)$. On peut donc diviser $Q(x)$ par $(x – 2)$:

$$
\begin{array}{llll|l}
x^3 & +x^2 & -4x & -4 & \underline{\quad x-2 \quad\quad} \\
x^3 & -2x^2 & & & x^2 + 3x + 2 \\
 & 3x^2 & -4x & & \\
 & 3x^2 & -6x & & \\
 & & 2x & -4 & \\
 & & 2x & -4 & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Ainsi $Q(x) = x^3 + x^2 – 4x – 4$ peut se factoriser $(x –2)(x^2 + 3x + 2)$. $P(x)$ peut donc se factoriser $(x – 3)(x – 2)(x^2 + 3x + 2)$. Il ne reste plus qu'à trouver les racines de $x^2 + 3x + 2$ pour déterminer les deux dernières racines de $P(x)$.

Exercice 7

Rép. $x_1 = –7$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$

Trouvez les racines de $x^3 – 3x^2 – 46x + 168$, sachant que $–7$ est une racine.

Exercice 8

Rép. $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$

Trouvez les racines de $x^4 – 14x^3 + 68x^2 – 136x + 96$, sachant que 2 est une racine double.

Exercice 9

Rép. $x_1 = –1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

Trouvez les racines de $x^3 – 2x^2 – x + 2$.

Exercice 10

Rép. $x_1 = 2$, x_2 et x_3 IR

Trouvez les racines de $2x^3 – 5x – 6$, sachant que 2 est une racine.

Exercice 11

Rép. 0 ; 3 ; –2

Résoudre l’équation $x^4 – x^3 – 6x^2 = 0$.

VI. Équations irrationnelles

Une équation où l'inconnue figure sous un radical est dite **irrationnelle**. Pour résoudre une telle équation, on est amené à élever les deux membres d'une égalité à la puissance n pour éliminer le radical $\sqrt[n]{}$.

Un exemple résolu

Résoudre l'équation $\sqrt{2+x} + 4 - \sqrt{10-3x} = 0$

on isole un radical	$\sqrt{2+x} + 4 = \sqrt{10-3x}$
on élève au carré les deux membres	$2 + x + 8\sqrt{2+x} + 16 = 10 - 3x$
on isole le radical restant	$8\sqrt{2+x} = -8 - 4x$
on simplifie par 4	$2\sqrt{2+x} = -2 - x$
on élève au carré	$4(2+x) = 4 + 4x + x^2$
on simplifie	$x^2 = 4$

On obtient deux solutions : $x_1 = -2$ et $x_2 = 2$. Cependant, seule la solution $x_1 = -2$ satisfait l'équation proposée. $x_2 = 2$ est une **solution étrangère** qui est apparue suite à l'élévation au carré. Il faut donc **toujours vérifier les résultats obtenus**.

Exercice 12

Réponses

a. 7 et 5 **b.** 2
c. 4.29 **d.** –
e. 24/7 **f.** $\sqrt[3]{1 \pm \sqrt{5}}$
g. 4 et 3

Résoudre les équations suivantes :

a. $x - \sqrt{4x-19} = 4$

b. $2(x+4) + \sqrt{x(x+6)} = 16$

c. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = 5$

d. $\sqrt{x+18} + \sqrt{x-8} = \sqrt{x+2}$

e. $\sqrt{x^2+1} = 7 - x$

f. $x^2 = \sqrt[3]{2x^3+4}$

g. $\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = \dfrac{12}{\sqrt{5+x}}$

Exercice 13

Dans chacune des formules de physique suivantes, exprimez chaque lettre au moyen des autres :

a. $F = G\,\dfrac{m_1 \;\; m_2}{r^2}$

b. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

c. $v = a \;\; t + v_0$

d. $x = \dfrac{1}{2}\,a \;\; t^2 + x_0$

e. $U = R \;\; I$

f. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

g. $P = \dfrac{U^2}{R}$