CHAPITRE VI

Les Équations Différentielles

Introduction

Une équation différentielle est une équation qui comporte des dérivées.

Exemple

$$1 \quad y' \quad x \quad 5 \qquad\qquad 2 \quad y''\ ^3 \quad y'\ ^4 \quad 3y \quad x^2$$

$$3 \quad y'' \quad 3y' \quad 2y \quad 0$$

L'ordre d'une équation différentielle est celui de la dérivée de l'ordre le plus élevé qui y figure. 1) est du premier ordre, 2) et 3) du second ordre.

Le degré d'une équation différentielle, si celle-ci peut-être écrite comme un polynôme où les indéterminées sont les dérivées, est le degré de la dérivée de l'ordre le plus élevé. 2) est du troisième degré.

Équations Différentielles linéaires du Premier Ordre

Définition *Soit I un intervalle ouvert de [R] , a : I → [R] et b : I → [R] deux fonctions continues réelles de variable réelle.*

On dit que la fonction dérivable : $I \to$ [R] est une solution de l'équation différentielle :

$$y' \quad a\ x\ y \quad b\ x \qquad\qquad \#$$

si et seulement si on a pour tout x qui appartient à I :

$$'\ x \quad a\ x \quad x \quad b\ x$$

L'équation (ref: eq1) est dite différentiable linéaire du premier ordre. (linéaire car le premier membre peut-être considéré comme une combinaison linéaire de y et de y')

Soit :

$$E \ : y' \quad a\ x\ y \quad b\ x$$

On appelle <u>équation homogène</u> associée à E l'équation :

$$E_o \ : y' \quad a\ x\ y \quad 0$$

Résolution de l'équation homogène

$$\boxed{E_o \ : y' \quad a\ x\ y \quad 0}$$

Pour $y \neq 0$ on a :

$$\frac{y'}{y} \quad -a \; x$$

d’où

$$\ln|y| \quad - \quad a \; x \; dx$$

Si A est une primitive de a, on a :

$$\ln|y| \quad -A \; x \quad k$$

d’où

$$\boxed{y \quad ce^{-A \; x}}$$

Exemple

$$y' - 2xy \quad 0$$

$$Pour \; y \neq 0, \; \frac{y'}{y} \quad 2x$$

$$\ln|y| \quad x^2 \quad k$$

$$et \; donc \; y \quad ce^{x^2}$$

Résolution avec second membre

$$E \;\; : y' \quad a \; x \; y \quad b \; x$$

Soit y_o la solution de l’équation homogène associée :

$$y_o \quad ce^{-A \; x}, \quad où \; A' \equiv a$$

Résolution de E par la méthode de la variation de la constante :

$$Soit \;\; y \quad c \; x \; e^{-A \; x}$$

$$y' \quad c' \; x \; e^{-A \; x} - a \; x \; c \; x \; e^{-A \; x}$$

En remplaçant dans E on a :

$$c' \; x \; e^{-A \; x} - a \; x \; c \; x \; e^{-A \; x} \quad a \; x \; c \; x \; e^{-A \; x} \quad b \; x$$

$$c' \; x \quad b \; x \; e^{A \; x} \quad c \; x \quad b \; x \; e^{A \; x} \; dx$$

La solution générale de E est donc :

$$y = e^{-A(x)} . \int b(x) e^{A(x)} dx$$

Exemple

$$xy' - 2y = x^3 e^x \quad (E)$$

Pour $x \neq 0$ on a :

$$y' - \frac{2}{x} y = x^2 e^x$$

Solution de l'équation homogène associée à (E) :

$$(E_o) : y' = \frac{2}{x} y$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + k$$

d'où

$$y = cx^2$$

Variation de la constante :

$$y = c(x)x^2$$

$$y' = c'(x)x^2 + 2c(x)x$$

d'où en remplaçant dans $y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x$ on a :

$$c'(x)x^2 + 2c(x)x - \frac{2}{x}c(x)x^2 = x^2 e^x \Rightarrow c'(x) = e^x$$

soit

$$c(x) = e^x + k$$

et enfin

$$y = x^2 e^x + kx^2$$

Équations remarquables du premier ordre

Équations à variables séparées

Ce sont des équations qui peuvent se mettre sous la forme :

$$f(y).y' = g(x)$$

$$f\;y\;\frac{dy}{dx}\quad\quad g\;x$$

$$f\;y\;dy\quad\quad g\;x\;dx$$

Le problème se ramène donc à une recherche de primitives.

1)

$$x^3\quad\quad y\quad 1\;{}^2 y'\quad\quad 0\quad\quad x^3 dx\quad\quad y\quad 1\;{}^2 dy\quad\quad 0\;d'o\grave{u}$$

$$\frac{x^4}{4}\quad\quad\frac{y\quad 1\;{}^3}{3}\quad\quad k$$

2)

$$y'\quad\quad\frac{4y}{x\;y-3}$$

$$\frac{y-3}{y}dy\quad\quad\frac{4}{x}dx$$

$$1-\frac{3}{y}\;dy\quad\quad\frac{4}{x}dx\quad\quad y-3\ln|y|\quad\quad 4\ln|x|\quad\quad k$$

$$y\quad\quad \ln|x^4y^3|\quad\quad k$$

Équations Homogènes

Ce sont les équations de la forme :

$$y'\quad\quad f\;\frac{y}{x}$$

On se ramène à une équation à variables séparées en posant

$$u\quad\quad\frac{y}{x}\quad\quad y\quad\quad ux$$

d’où

$$dy\quad\quad xdu\quad\quad udx$$

et on a

$$xdu\quad\quad udx\quad\quad f\;u\;dx$$

$$\frac{dx}{x}\quad\quad\frac{du}{f\;u\;-u}$$

Exemple

$$y^2 dx \quad x^2 - xy - y^2 \; dy \quad 0$$

En changeant $y \; en \quad y \; et \; x \; en \quad x$ l'équation reste la même : Elle est donc homogène.
On a

$$\frac{y^2}{x^2} dx \quad 1 - \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \; dy \quad 0$$

$$\frac{y}{x} \quad u \quad d'où \quad dy \quad udx \quad xdu$$

$$u^2 dx \quad 1 - u - u^2 \quad udx \quad xdu \quad 0 \quad \frac{dx}{x} \quad \frac{1 - u - u^2}{u \; 1 - u \quad 1 \quad u} du \; ...$$

Équations Différentielles Linéaires du Second Ordre à Coefficients Constants

Ces équations décrivent l'évolution d'un système physique quelconque au voisinage d'une position d'équilibre.

Équations sans second membre

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre toute équation différentielle de la forme :

$$\boxed{E \; : ay'' \quad by' \quad cy \quad 0} \quad où \quad a, b, c \quad [\mathrm{R}]^3 \quad ou \quad [\mathrm{C}]^3$$

Le polynôme $P \; r \quad ar^2 \quad br \quad c$ s'appelle le polynôme caractéristique associé.
Soit $\Delta \quad b^2 - 4ac$ le discriminant de ce polynôme, alors :

Si $\Delta \quad 0,$ *soit r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de P.*
E a pour solution :

$$\boxed{y_o \; x \quad Ae^{r_1 x} \quad Be^{r_2 x}} \quad où \quad A, B \quad [\mathrm{R}]^2$$

Si $\Delta \quad 0,$ *Soit r la racine double de P.*
E a pour solution :

$$\boxed{y_o \; x \quad A \quad Bx \; e^{rx}} \quad où \quad A, B \quad [\mathrm{R}]^2$$

Si $\Delta \quad 0,$ *soit $r_1 \quad i$ et $r_2 \quad - i$ les racines conjuguées, où $\quad , \quad [\mathrm{R}]^2$.*
E a pour solution :

$$\boxed{y_o \; x \quad e^{\;x} \; A\cos \quad x \quad B\sin \quad x} \quad où \quad A, B \quad [\mathrm{R}]^2$$

$$\boxed{y_o \; x \quad e^{\;x} \cos(\; x \quad)}, \quad où \quad ^2 \quad A^2 \quad B^2 \; et \; \tan \quad \frac{-B}{A}$$

Exemple

$$1 \quad y'' - 4y' \quad 5y \quad 0 \quad alors \quad y_o \quad e^{2x} \; A\cos x \quad B\sin x$$

$$2 \quad y'' \quad y' - 6y \quad 0 \quad alors \quad y_o \quad Ae^{2x} \quad Be^{-3x}$$

Équation avec second membre

On appelle équation linéaire du second ordre à coefficients constants avec second membre, toute équation différentielle de la forme :

$$E \; : ay'' \quad by' \quad cy \quad f\; x \;, \quad a \neq 0$$

où f est une fonction complexe de variable réelle.

L’équation

$$E_o \; : ay'' \quad by' \quad cy \quad 0$$

s’appelle l’équation homogène associée.

La solution de E s’obtient en ajoutant une solution particulière y_1 de E à la solution y_o de l’équation homogène associée.

Recherche d’une solution particulière - Seconds membres particuliers -

$ay'' \quad by' \quad cy \quad P_n \; x$, où P_n est un polynôme de degré n

Une solution particulière y_1 est de la forme :

$$\left.\begin{array}{llll} 1 & Si \; c \neq 0, & y_1 \; x & Q_n \; x \\ 2 & Si \; c \quad 0 \; et \; b \neq 0, & y_1 \; x & Q_{n \; 1} \; x \\ 3 & Si \; c \quad b \quad 0, & y_1 \; x & Q_{n \; 2} \; x \end{array}\right\}$$

Q_n est un polynôme de degré n [N]

On détermine les coefficients de Q par identification.

Exemple

$$y'' - 3y' \quad 2y \quad 2x^2 - 5x \quad 3 \quad E$$

Solution de l’équation homogène :

$$y'' - 3y' \quad 2y \quad 0$$

$$r^2 - 3r \quad 2 \quad 0$$

$$\Delta \quad 1, \; r_1 \quad 2, \; r_2 \quad 1$$

$$\boxed{y_o \quad Ae^{2x} \quad Be^{x}}$$

Solution particulière :

$$
\begin{aligned}
y_1 &\quad ax^2 \quad bx \quad c \\
y_1' &\quad 2ax \quad b \\
y_1'' &\quad 2a
\end{aligned}
$$

d’où

$$2a - 3\ 2ax \quad b \qquad 2\ ax^2 \quad bx \quad c \qquad 2x^2 - 5x \quad 3$$

et par identification, on a :

$$\left.\begin{array}{ll} a & 1 \\ b & \frac{1}{2} \\ c & \frac{5}{4} \end{array}\right\}$$

La solution générale de E est donc :

$$y \quad y_o \quad y_1$$

$$\boxed{y \quad Ae^{2x} \quad Be^{x} \quad x^2 \quad \frac{x}{2} \quad \frac{5}{4}}$$

$ay'' \quad by' \quad cy \quad de^{\ x}$, *où d et* sont des constantes

Une solution particulière est de la forme :

1) Si n’est pas racine du polynôme caractéristique :

$$\boxed{y_1\ x \qquad \frac{de^{\ x}}{a\ ^2\ b\ \ c}}$$

2) Si est racine simple du polynôme caractéristique :

$$\boxed{y_1\ x \qquad \frac{dxe^{\ x}}{2a\ \ b}}$$

3) Si est racine double du polynôme caractéristique :

$$\boxed{y_1\ x \qquad \frac{dx^2e^{\ x}}{2a}}$$

Exemple

$$y'' - 5y' \quad 6y \quad 3e^{4x}$$

$$\left.\begin{array}{ll} r_1 & 3 \\ r_2 & 2 \end{array}\right\} y_o \quad Ae^{3x} \quad Be^{2x}$$

La solution particulière est :

$$y_1 \quad \frac{3e^{4x}}{16 - 20 \quad 6} \quad \frac{3}{2}e^{4x}$$

$ay'' \quad by' \quad cy \quad P_n \; x \; e^{\;x}$, *où* P_n *est un polynôme* de degré n et une constante

Une solution particulière y_1 est de la forme :

1) Si n’est pas racine du polynôme caractéristique :

$$\boxed{y_1 \; x \quad Q_n \; x \; e^{\;x}}$$

2) Si est racine simple du polynôme caractéristique :

$$\boxed{y_1 \; x \quad Q_{n \; 1} \; x \; e^{\;x}}$$

3) Si est racine double du polynôme caractéristique :

$$\boxed{y_1 \; x \quad Q_{n \; 2} \; x \; e^{\;x}}$$

1) $y'' - 2y' \quad y \quad 6xe^x$ *alors* $y \quad Ax \quad B \quad x^3 \; e^x$

2) $y'' \quad 2y' - 8y \quad 4 \; 3x \quad 5 \; e^{2x}$ *alors* $y \quad Ae^{2x} \quad Be^{-4x} \quad 3x \quad x^2 \; e^{2x}$

$ay'' \quad by' \quad cy \quad e^{\;x} \; A\cos \quad x \quad B\sin \quad x$, *où* , , A, B sont des constantes

Une solution particulière y_1 est de la forme :

1) Si $\quad i$ n’est pas racine du polynôme caractéristique :

$$\boxed{y_1 \; x \quad e^{\;x} \; C\cos \quad x \quad D\sin \quad x}$$

2) Si $\quad i$ est racine du polynôme caractéristique :

$$\boxed{y_1 \; x \quad xe^{\;x} \; C\cos \quad x \quad D\sin \quad x}$$

1) $y'' - 3y' \quad 2y \quad \cos x$, *alors* $y \quad Ae^x \quad Be^{2x} \quad \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$

2) $y'' - 2y' \quad y \quad \cos x$, *alors* $y \quad A \quad Bx \; e^x - \frac{1}{2}\sin x$

Méthode de la variation des constantes

Cette méthode permet la résolution d’une équation avec second membre dans le cas général.

$$ay'' \quad by' \quad cy \quad f \; x$$

Soit y_1 et y_2 deus solutions linéairement indépendantes de l’équation homogène et telle que :

$$w \quad y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$$

La solution générale de l’équation sans second membre est :

$$y \quad Ay_1 \quad By_2$$

$$y' = A'y_1 + Ay_1' + B'y_2 + By_2'$$

On impose $A'y_1 + B'y_2 = 0$, d'où :

$$y'' = A'y_1' + Ay_1'' + B'y_2' + By_2''$$

On a donc :

$$a\left(A'y_1' + Ay_1'' + B'y_2' + By_2''\right) + b\left(Ay_1' + By_2'\right) + c\left(Ay_1 + By_2\right) = f(x)$$

$$a\left(A'y_1' + B'y_2'\right) = f(x)$$

D'où le système :

$$\left.\begin{array}{l} A'y_1' + B'y_2' = a^{-1}f(x) \\ A'y_1 + B'y_2 = 0 \end{array}\right\}$$

w étant non nul on en déduit A' et B' puis en intégrant on trouve la solution générale.

Exemple

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

$A\cos x$ *et* $B\sin x$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène.

$$y = A\cos x + B\sin x$$

$$y' = A'\cos x - A\sin x + B'\sin x + B\cos x$$

On impose $A'\cos x + B'\sin x = 0$, d'où :

$$\left.\begin{array}{l} -A'\sin x + B'\cos x = \frac{1}{\sin x} \\ A'\cos x + B'\sin x = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} A' = -1 \\ B' = \frac{\cos x}{\sin x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = -x + k \\ B = \ln|\sin x| + k_1 \end{array}\right\}$$

D'où

$$y = -x\cos x + k\cos x + \sin(x)\ln|\sin x| + k_1\sin x$$