A. *Variables aléatoires discrètes sur un univers fini*

1. Convention d'écriture

Soit $\Omega = \{\omega_1,...,\omega_N\}$ un univers fini probabilisé. On appelle variable aléatoire, notée X, définie sur Ω toute application de Ω dans R.

On note $X(\Omega) = \{x_1,\dots,x_n\}$ (n appartient à N) l'ensemble image de Ω par X.

$X = x_i$ est la partie de Ω formées de toutes les éventualités ω_k ayant pour image x_i. Il y en a n, formant une partition de Ω.

$X > x$ est la partie de Ω formée de toutes les éventualités dont le nombre image est supérieur strictement à x.

$x <= X <= y$ est la partie de Ω formée de toutes les éventualités dont le nombre image est compris entre x et y.

2. Loi de probabilité

Soit Ω un univers fini probabilisé st X une variable aléatoire sur Ω. On appelle loi de probabilité de X, l'application qui à chaque valeur image x_i fait correspondre la probabilité p_i de la partie $(X = x_i)$ de Ω.

On la représente alors sous forme d'un tableau :

$X = x_i$	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

On a donc $p(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

3. Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X, l'application F de ℝ dans [0 ; 1] qui associe à tout réel x la probabilité $p(X < x)$ c'est à dire $F(x) = p(X < x)$.

Elle est croissante, continue par morceau et en escalier.

De plus on a : $p(X > x) = 1 - F(x)$ et $p(x < X < y) = F(y) - F(x)$.

4. Valeurs caractéristiques d'une variable aléatoire à valeurs discrètes

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{x_1\dots x_n\}$ avec les probabilités respectives $\{p_1\dots p_n\}$.

a) *Espérance*

On appelle espérance mathématique de X le nombre $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. Ce nombre s'interprète comme la moyenne m des valeurs x_i pondérées par leur probabilité p_i.

b) <u>Propriétés</u>

Soit k une constante alors : $\begin{array}{l} E(k) = k \\ E(X + k) = E(X) + k \\ E(kX) = kE(X) \end{array}$

c) <u>Variance et écart-type</u>

On appelle variance de X le nombre $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$. L'écart-type est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

d) <u>Propriétés</u>

Soit k une constante alors : $\begin{array}{l} V(k) \\ V(X + k) = V(X) \\ V(kX) = k^2 V(X) \end{array}$

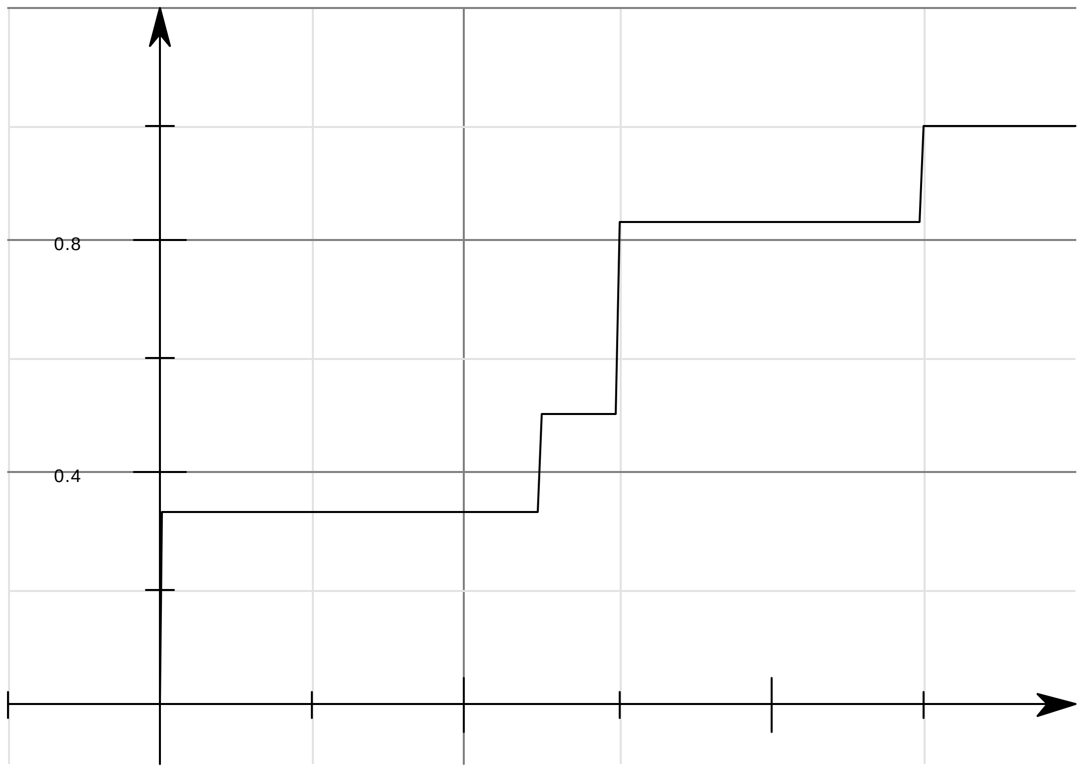
5. <u>Exemple</u>

Contre une mise convenable, on lance un dé marqué as, roi, dame, valet, dix et neuf.
L'as rapporte 10 F   Le roi et la dame 6 F   Le valet 5 F   le 10 et le 9 rien

Loi de probabilité

$X = x_i$	0	5	6	10
p_i	1/3	1/6	1/3	1/6

Fonction de répartition F



E(X)=4,5 V(X)=12,58 et σ(X)=3,55

6. Loi binomiale

Une variable aléatoire X à valeurs entières : 0,1 , 2 , …n suit une loi binomiale de paramètres n et p si et seulement si pour tout k appartenant à {1,…,n} on a : $p(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$.
On l'utilise chaque fois qu'une même expérience a 2 éventualités. Elle est notée B(n,p).

Son espérance est alors E(X) = np, sa variance V(X) = npq.

B. Variables aléatoires dénombrables sur un univers infini

1. Loi de Poisson

Une variable aléatoire dénombrable(c'est à dire établissant une bijection avec) X suit une loi de Poisson de paramètre m (m > 0) sis et seulement si : $p(X=k)=e^{-m}\dfrac{m^k}{k!}$.
Son espérance est E(X)=m, sa variance V(X) = k.

C. Variables aléatoires continues

1. Définition

Une variable aléatoire continue est une variable aléatoire X dont l'ensemble des valeurs est ou un intervalle I de .
Une telle variable est généralement définie par sa fonction de répartition $F: x \mapsto F(x)=p(X\leq x)$.

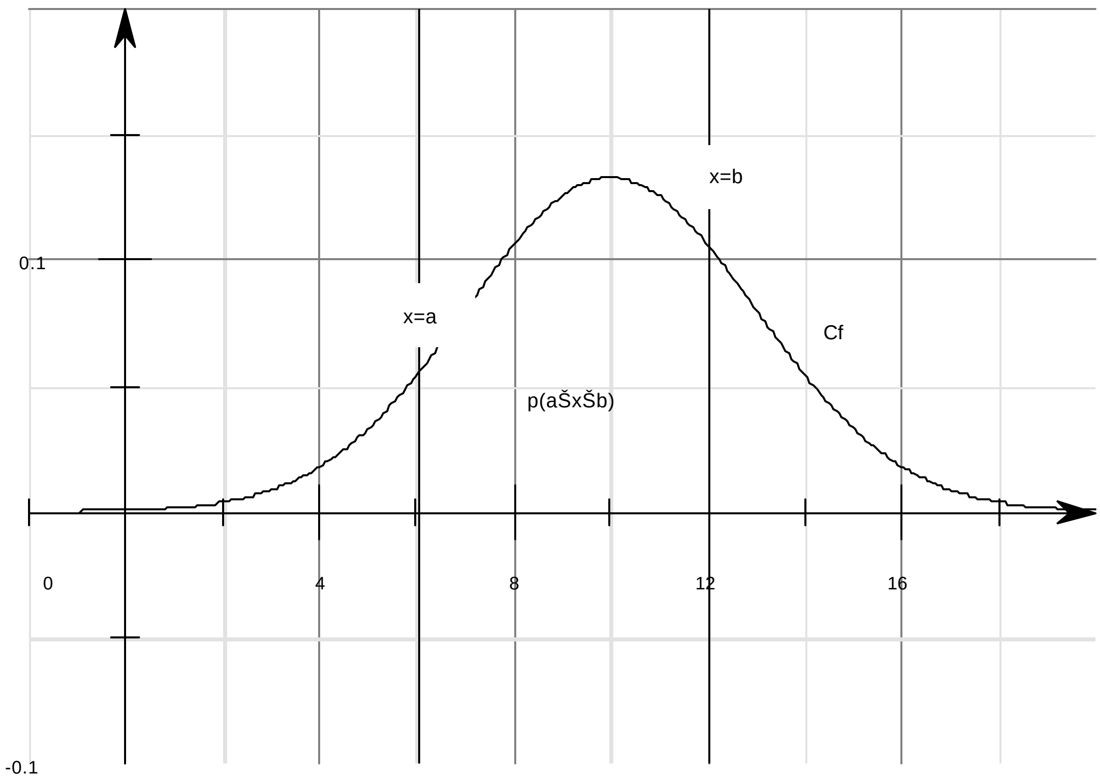
2. Fonction densité de probabilité

On désigne par fonction densité de probabilité, la fonction dérivée f de la fonction de répartition F. On alors : $\int f(x)dx = F(x)$ et $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = p(a \leq X \leq b)$. c'est à dire que l'aire mesurée entre les droites d'équation x = a et x = b, la courbe représentative de f et l'axe des abscisses correspond à p(a < x < b).

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(a) = p(X \leq a)$$

On a $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = 1 - F(a) = p(X \geq a) = 1 - p(X < a)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$



3. Valeurs caractéristiques

Soit X une variable aléatoire continue alors on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[x - E(X)\right]^2 dx = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

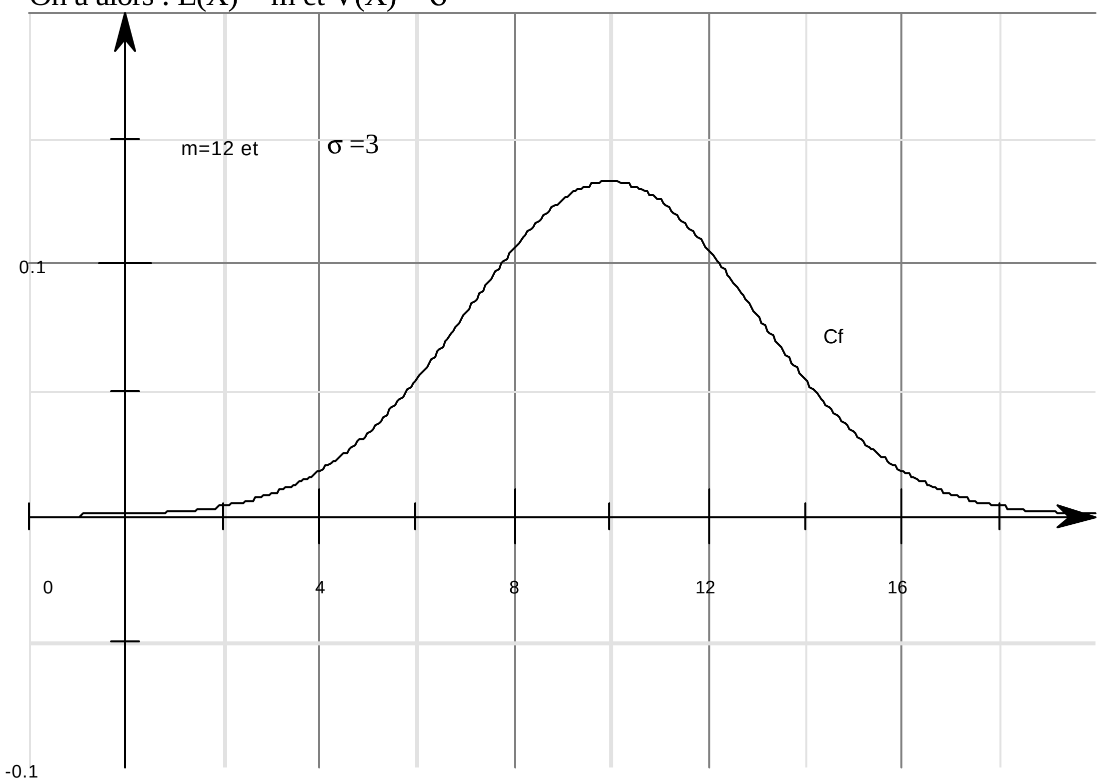
D. La loi normale ou loi de Laplace-Gauss

1. Définition

Une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ de paramètres m et σ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-m}{\sigma}\right]^2}$.

Cette loi est souvent qualifiée de loi du hasard ; elle est très fréquente dans des mesures répétées d'une même grandeur.

On a alors : E(X) = m et V(X) = σ^2



2. La loi normale centrée réduite

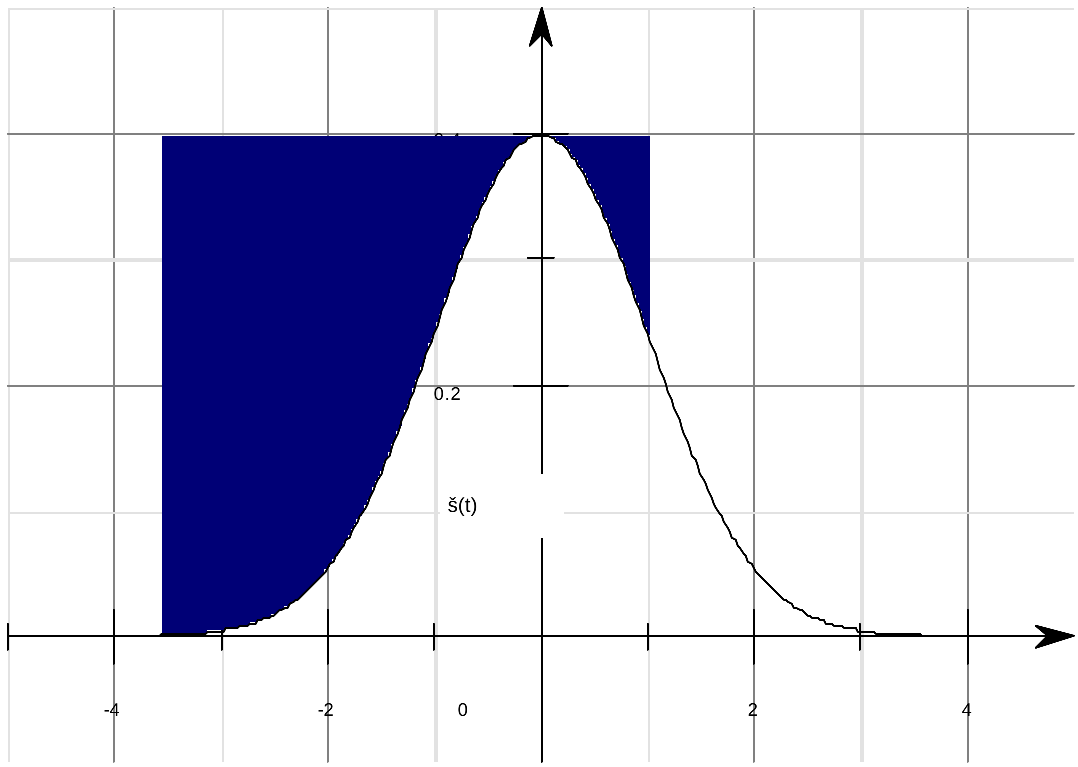
Si une variable aléatoire suit la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ il est difficile de calculer F(x) pour n'importe quel x;
Il existe alors une loi qui est tabulée qui nous permet grâce aux théorème suivant de calculer facilement F(x) pour $\mathcal{N}(m;\sigma)$.

a) Théorème :

si une variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma)$ alors la variable aléatoire $T = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

Sa fonction de répartition est notée $\pi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$

Sa lecture se fait grâce à une table (cf annexe).



b) <u>Exemples de calculs</u>

$p(T < 1{,}67) = \pi(1{,}67) = 0{,}9525$

$p(T > 1{,}25) = 1 - p(T < 1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056$

$p(T < -1{,}67) = p(T > 1{,}67) = 1 - p(T < 1{,}67)$

$p(-t < T < t) = 2\pi(t) - 1$

3. Carte de contrôle

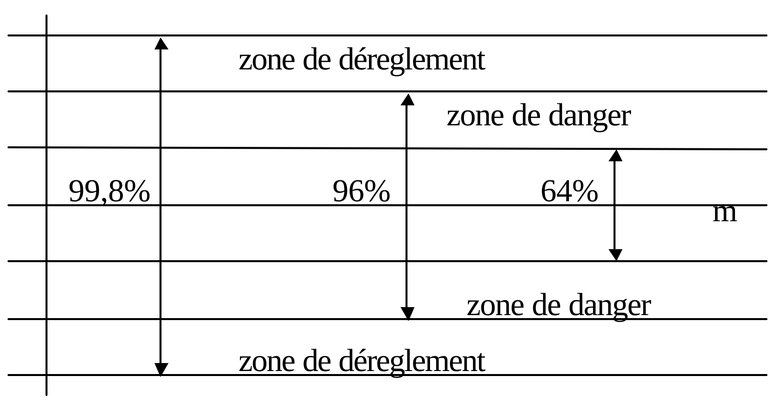
Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $N(m;\sigma)$ alors $T = \dfrac{X - m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $N(0\ ;\ 1)$ d'où

$$p(m - \sigma < X < m + \sigma) = p(-1 < T < 1) = 2\pi(1) - 1 = 0{,}64 = 64\%$$

$$p(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma) = p(-2 < T < 2) = 2\pi(2) - 1 = 0{,}96 = 96\%$$

$$p(m - 3\sigma < X < m + 3\sigma) = p(-3 < T < 3) = 2\pi(3) - 1 = 0{,}998 = 99{,}8\%$$

ce que l'on représente sous forme de carte de contrôle :



4. Approximation des lois

Dans certaines conditions on peut par commodité approximer certaines lois par une loi normale:

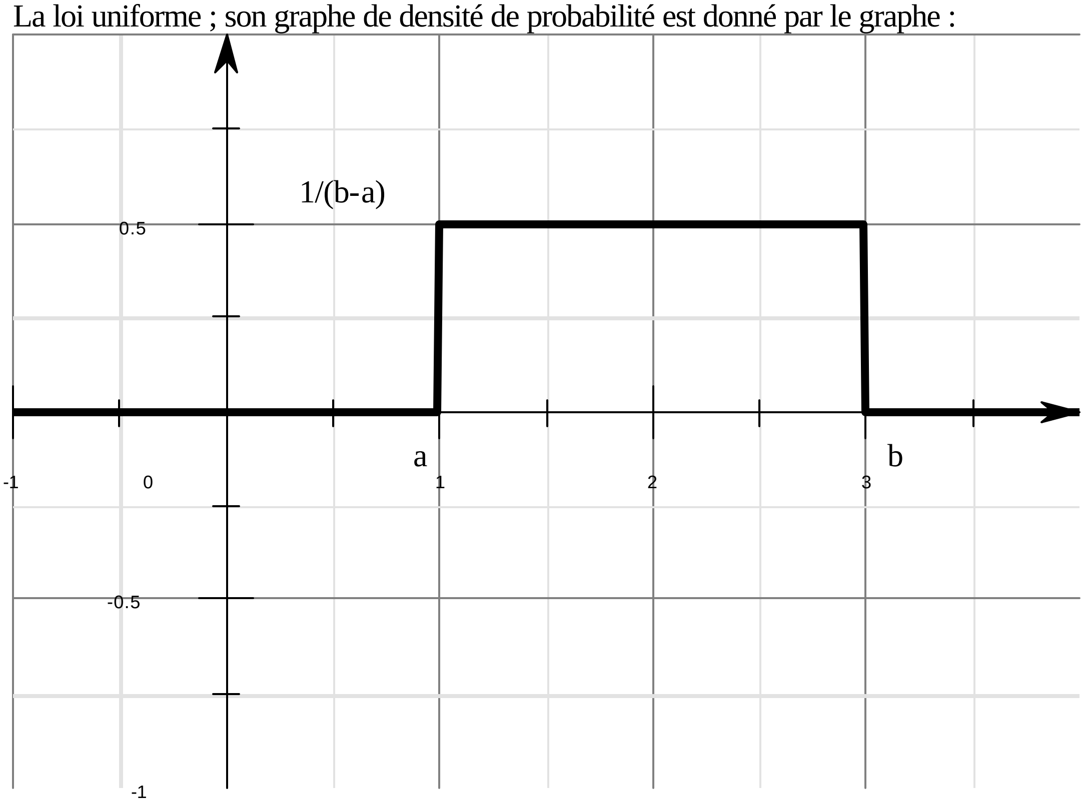
$B(n,p) \approx P(np)$ si $p < 0,1$ $npq \leq 10$ et $n > 30$

on a $B(n,p) \approx \aleph(np, \sqrt{npq})$ si $npq > 10$ et $n \geq 50$

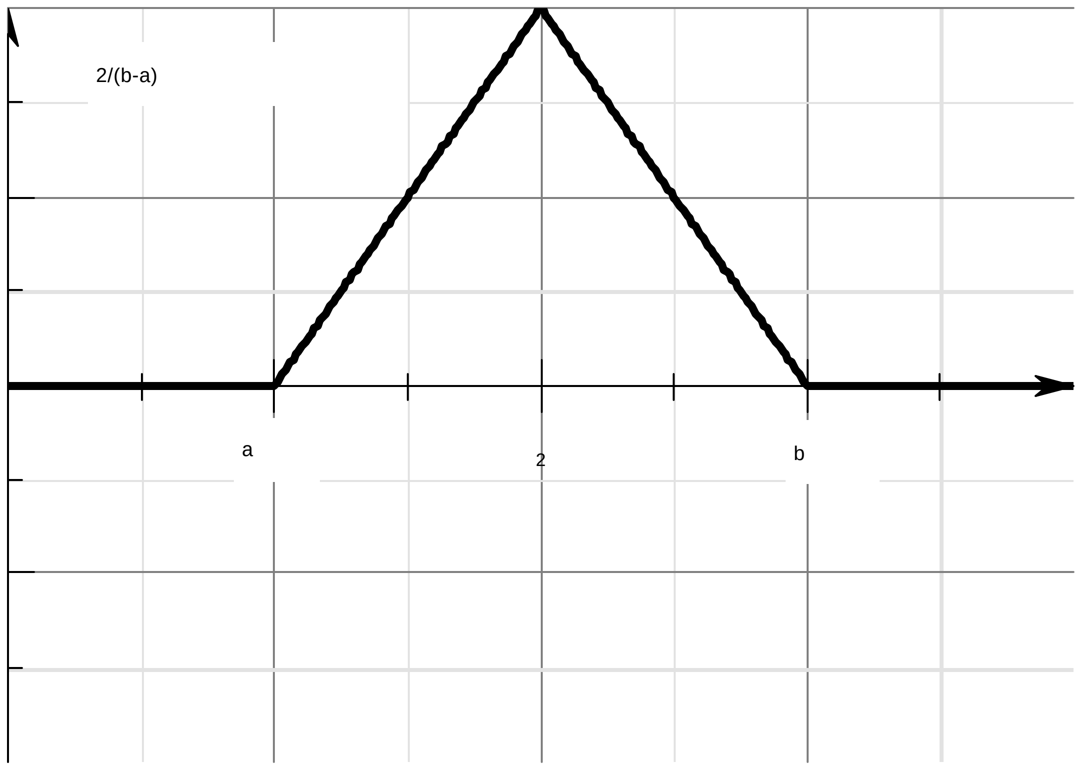
$P(m) \approx \aleph(m, \sqrt{m})$ si $m > 20$

E. D'autres exemples de lois continues

La loi uniforme ; son graphe de densité de probabilité est donné par le graphe :



La loi triangulaire : elle est donnée par son graphe fonction densité de probabilité :



2/(b-a)
a
2
b