COMBINATOIRE

A. <u>Notion d'expérience aléatoire</u>

1. <u>Définition</u>

Une expérience ayant un nombre fini d'issues possibles est appelé **expérience aléatoire** s'il est impossible de savoir à l'avance quelle en sera l'issue. L'ensemble de toutes les issues possibles est appelé l'**univers** des possibles associé à cette expérience; Il est généralement noté Ω. Chaque sous ensemble de Ω contenant un seul élément, c'est à dire chaque issue possible est appelé événement élémentaire.

2. <u>Remarque</u>

Si on note chaque issues possibles $e_1,\ldots,e_n$ alors $\Omega=\{e_1,\ldots,e_n\}$ et chaque $\{e_i\}$ est alors un événement élémentaire.
Une expérience aléatoire est déterminée par l'expérience que l'on effectue et donc l'univers aussi, c'est à dire que si on change d'expérience aléatoire, on change aussi d'univers !

B. <u>Vocabulaire des événements</u>

1. <u>Définition</u>

Soit E une expérience aléatoire et Ω l'univers des possibles associé à cette expérience. L'ensemble de toutes les parties de Ω, $P(\Omega)$ est l'ensemble des événements lié à Ω.
Ω est l'événement certain. $\varnothing$ est l'événement impossible.

2. <u>Composition d'événements</u>

a) <u>Evénement A È B</u>

La loi $\cup$ dans $P(\Omega)$ correspond à l'emploi du « ou inclusif » entre deux événements.

b) <u>Evénement A Ç B</u>

La loi $\cap$ dans $P(\Omega)$ correspond à l'emploi du « et » entre deux événements.
Dans le cas où $A\cap B=\varnothing$, on dit que les deux événements A et B sont disjoints ou incompatibles.

c) <u>Evénement contraire</u>

Soit A un événement lié à une expérience aléatoire E d'univers associé Ω. A est donc une partie de Ω.
Ainsi $C_A=\{e_i\in \Omega / e_i\notin A\}$ est associé à l'événement qui n'est réalisé que si A ne l'est pas. On l'appelle complémentaire de A ou « non A ». Il est noté $\overline{A}$.
On a alors : $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ et $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{(n>p)}=(n\le p)$

C. ***Axiomatique du calcul des probabilités***

1. Axiomes du calcul des probabilités

Soit E une expérience aléatoire et Ω son univers associé. On appelle probabilité, notée p, toute application de l'ensemble des événements $P(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ vérifiants les trois axiomes suivants :

A1 : $\forall A \in P(\Omega)\;\; 0 \leq p(A) \leq 1$

A2 : $p(\Omega)=1$

A3 : si deux événements A et B sont incompatibles alors $p\left(A \bigcup B\right) = p(A) + p(B)$

2. Conséquences

La probabilité d'un événement $A=\{e_1,\ldots,e_n\}$ est telle que $p(A)=p(e_1)+\ldots+p(e_n)$.

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

$$p(\emptyset) = 0$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

3. Cas particulier important : l'équiprobabilité

L'équiprobabilité correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité. S'il y a n événements élémentaires chacun possède une probabilité de 1/n d'apparaître. Dans ce cas, on peut écrire la formule suivante :

$$p(A) = \frac{\text{nbre d'éléments de } A}{\text{nbre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

D. ***Probabilité conditionnelle***

1. Définition

Soit p une probabilité sur un univers Ω et soit A un événement de probabilité non nulle. La probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que A l'est déjà est défini par $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$. On l'appelle probabilité conditionnelle.

2. Propriétés

$p(\Omega / A) = 1$

$p(B \cup C / A) = p(B/A) + p(C/A)$

$p(A \cap B) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A)$

Cette formule est appelée formule des probabilités composées.

3. Exemple

deux machines M1 et M2 fabriquent des tiges. Elles produisent respectivement 1/3 et 2/3 de la production. La machine M1 sort 5% de tiges défectueuses et M2 en sort 6%.

Soit les événements A : « la tige est fabriquée par M1 » B : « la tige est fabriquée par M2 »
D : « la tige est défectueuse ».
1) Quelle est la probabilité que la tige soit fabriquée par M1 ? c'est p(A)=1/3.
2) On tire une tige de la production de M1. Quelles est la probabilité qu'elle soit défectueuse?
C'est p(D/A)=5/100.
3) On tire une tige de la production. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de M1 et qu'elle soit défectueuse ? C'est $P(A \cap D) = p(D / A)p(A) = \frac{1}{60}$.
4) On tire une tige de la production. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit défectueuse ?
C'est $p(D) = p((A \cap D) \cup (B \cap D)) = p(D / A)p(A) + p(D / B)p(B) = \frac{17}{300}$.
5) Quelle est la probabilité qu'une pièce défectueuse ait été fabriquée par M1 ?
C'est $P(A / D) = \frac{p(A \cap D)}{p(D)} = \frac{1}{60} \times \frac{300}{17} = \frac{5}{17}$.

E. Evénements indépendants

1. Définition

Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience aléatoire E et p une probabilité associée. Deux événements sont dits indépendants relativement à p si : $p(A \cap B)=p(A)p(B)$

2. Remarque

Il ne faut pas confondre indépendant et incompatible
Si deux événements sont indépendants alors $p(A \cap B)=p(A)p(B)$ donc p(B/A)=p(B) et p(A/B)=p(A) ; cela signifie que deux événements sont indépendants si et seulement si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre.

F. Eléments d'analyse combinatoire

1. Les p-listes

Elles correspondent à un tirage successif et avec remise c' est à dire que les répétitions sont possibles et que l'ordre est important.
Le nombre de p-listes d'un ensemble E à n éléments est n^p.

2. Les suites de p éléments distincts

Elles correspondent à un tirage successif sans remise, c'est à dire que les répétitions sont impossibles et l'ordre est important.

a) Les permutations

Toute suite de n éléments distincts choisis parmi les n éléments d'un ensemble E est appelé permutation de n éléments. Le nombre total de permutations d'un ensemble de n éléments est : n!.

b) <u>Les arrangements</u>

Toute suites de p éléments distincts choisis parmi n éléments distincts (n   p) est appelé arrangement de p éléments parmi n. Le nombre total d'arrangements de p éléments parmi n est :

$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1)$

3. <u>Nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments (p   n)</u>

Il correspond à un tirage simultané c'est à dire que les répétitions sont non possibles et que l'ordre n'est pas important.

Toute partie de p éléments distincts choisis parmi n éléments (p < n) est appelée combinaison de p éléments parmi n. Le nombre total de combinaisons d'un ensemble à n éléments est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

4. <u>Propriétés des arrangements et combinaisons</u>

$A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ et $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ formules évidentes à montrer à partir de la définition....

$C_n^p = C_n^{n-p}$ en effet il y a autant de parties de E à p éléments que de parties de E à n-p éléments..

$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$ cette formule peut se montrer à partir des formules de définition mais aussi par des considérations ensembliste : soit $a \in E$ et $E' = E \setminus \{a\}$ alors lors du choix d'un sous ensemble F à n éléments de E deux cas peuvent se produire à savoir $a \in F$ cela revient à choisir une partie à p-1 éléments de E' (C_{n-1}^{p-1} façon de la faire) ou $a \notin F$ cela revient à choisir une partie à p éléments de E' (C_{n-1}^{p} façon de le faire) on a donc :

$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$

Valeurs particulières :

$A_n^0 = 1$ $\qquad C_n^0 = 1$

$A_n^1 = n$ $\qquad C_n^1 = n$

$A_n^n = n!$ $\qquad C_n^n = 1$

5. <u>Triangle de Pascal - binôme de Newton :</u>

<u>Triangle de pascal</u> : la construction est basée sur la propriété $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			.
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Binôme de Newton : $\boxed{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p a^p b^{n-p}}$

Par exemple : $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Remarque : dans les cas particulier où a=b=1 on obtient $\sum_{p=0}^{p=n} C_n^p = 2^n$