CHAPITRE VII

COURBES PARAMÉTRÉES PLANES

Définition *Soit f et g deux fonctions définies et continues respectivement sur les parties D_f et D_g de [R] .*

Soit dans le plan rapporté à un repère orthonormé $O, \vec{i}, \vec{j}$ les points M de coordonnées

$$\left.\begin{array}{ll} x & f\ t \\ y & g\ t \end{array}\right\} \text{ où } t \quad D_f \cap D_g,\ t \text{ s'appelle le paramètre}$$

L'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ définit une courbe paramétrée C .

On a

$$\overrightarrow{OM}\ t \quad f\ t\ \vec{i} \quad g\ t\ \vec{j},\ t \quad D$$

On peut considérer C comme la trajectoire du point M où t représente le ”temps”. Dans ce cas $\overrightarrow{OM}\ t$ s'appelle le vecteur espace et :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}\ t}{dt} \text{ vecteur vitesse}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}\ t}{dt^2} \text{ vecteur accélération}$$

Une courbe plane paramétrée est une application :

$$\begin{array}{l} \vec{F} : D \to P \quad plan \\ \qquad t \quad \vec{F}\ t \quad \overrightarrow{OM}\ t \end{array}$$

Ensemble de définition. Ensemble d'étude

Définition *L'ensemble de* ***définition*** *est l'ensemble $D \quad D_f \cap D_g$*

Définition *Une courbe paramétrée définie par*

$$\begin{array}{l} \vec{F} : D \to [R]^2 \\ \qquad t \quad \begin{pmatrix} f\ t \\ g\ t \end{pmatrix} \end{array}$$

est dite **périodique** de période $T \quad 0$ si et seulement si :

$$t \quad D,\ T \quad t \quad D \text{ et } \vec{F}\ T \quad t \quad \vec{F}\ t$$

Remarque : $\vec{F}$ est périodique de période T si et seulement si f et g sont périodiques de même période T

Exemple *Le cercle de centre O et de rayon R a pour équation paramétrique*

$$\left.\begin{array}{l} x\ t \quad R\cos t \\ y\ t \quad R\sin t \end{array}\right\}$$

Alors $\vec{F}\ t \quad \overrightarrow{OM}\ t \quad \begin{pmatrix} x\ t \\ y\ t \end{pmatrix}$ et on a $\vec{F}\ 2 \quad t \quad \vec{F}\ t$ pour t [R]

Pratiquement on cherche le plus petit nombre positif T tel que

$$t \quad D \quad \left.\begin{array}{l} f\ T \quad t \quad f\ t \\ g\ T \quad t \quad g\ t \end{array}\right\}$$

C'est le P.P.C.M de la période de f et de la période de g.

La période étant déterminée, on peut réstreindre l'étude à un ensemble plus petit $D_e \quad D$.
Puis par une ou plusieurs transformations géométriques simples (symétries, translations) construire la courbe entièrement.

$$Si \ : \quad t \quad D, \quad t' \quad D \ tel\ que :$$

1	$f\ t' \quad f\ t \ \ et\ g\ t' \quad -g\ t$	Ox est axe de symétrie
2	$f\ t' \quad -f\ t \ \ et\ g\ t' \quad g\ t$	Oy est axe de symétrie
3	$f\ t' \quad -f\ t \ \ et\ g\ t' \quad -g\ t$	O est centre de symétrie
4	$f\ t' \quad g\ t \ \ et\ g\ t' \quad f\ t$	La première bissectrice est axe de symétrie
5	$f\ t' \quad -g\ t \ \ et\ g\ t' \quad -f\ t$	La seconde bissectrice est axe de symétrie
6	$f\ t \quad f\ t' \quad 2d\ \ et\ g\ t' \quad g\ t$	La droite $x \quad d$ est axe de symétrie

Exemple

$$\left.\begin{array}{l} x\ t \quad \cos\ 3t \\ y\ t \quad \sin\ 2t \end{array}\right\} t \quad [R]$$

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ a pour période } \frac{2}{3} \\ y \text{ a pour période} \end{array}\right\} T \quad PPCM\ \frac{2}{3}, \qquad 2$$

On obtient toute la courbe en faisant une étude sur $-\ ,$

$$\left.\begin{array}{l} x\ -t \quad x\ t \\ y\ -t \quad -y\ t \end{array}\right\} \text{symétrie par rapport à } Ox$$

On limite donc l'intervalle à $0,$

$$\left.\begin{array}{ll} x \quad -t & -x\ t \\ y \quad -t & -y\ t \end{array}\right\} \text{symétrie par rapport à } O$$

On limite donc l'étude à $0, \frac{}{2}$

Points Multiples

La courbe paramétrée présente un point double M, s'il existe $t_1 \quad D$ et $t_2 \quad D$ distincts tels que $M\ t_1 \quad M\ t_2$.

On définira de même les points triples, etc...

En pratique pour déterminer les points doubles on résout le système :

$$\left.\begin{array}{ll} x\ t_1 & x\ t_2 \\ y\ t_1 & y\ t_2 \end{array}\right\} avec\ t_1 \neq t_2$$

Exemple

$$\left.\begin{array}{ll} x\ t & sin\,t \\ y\ t & cos\,\frac{t}{2} \end{array}\right\} t \quad 0, 4$$

Le seul point multiple est le point double $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour t_1 et $t_2 \quad 3$

Branches Infinies

On dit qu'une courbe paramétrique présente une branche infinie quand t tend vers t_o (fini ou infini) quand l'une au moins des coordonnées tend vers l'infini.

Exemple

$$\left.\begin{array}{ll} x\ t & ln\ t \quad 1 \quad \frac{1}{t} \\ y\ t & t \quad \frac{1}{t} \end{array}\right\} pour\ t \quad -1, 0 \quad 0,$$

La courbe présente quatre branches infinies :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Pour } t \to & \text{Pour } t \to 0^- \\ \text{Pour } t \to 0 & \text{Pour } t \to -1 \end{array}\right.$$

Étude des branches infinies

Soit $t_o \quad \overline{[R]}$ si pour $t \to t_o$ on a :

1.

$$\left.\begin{array}{l} x \to \\ y \to y_o \quad [R] \end{array}\right\} \text{La droite } y \quad y_o \text{ est asymptote à la courbe}$$

2.

$$\left.\begin{array}{l} x \to x_o \quad [R] \\ y \to \end{array}\right\} \text{La droite } x \quad x_o \text{ est asymptote à la courbe}$$

3.

$$\left.\begin{array}{l} x \to \\ y \to \end{array}\right\} \text{On étudie alors la limite : } \lim_{t \to t_o} \frac{y\ t}{x\ t}$$

On a trois cas :

a.

$\lim_{t \to t_o} \frac{y\ t}{x\ t}$: La courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique Oy

b.

$\lim_{t \to t_o} \frac{y\ t}{x\ t} \quad 0$: La courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique Ox

c.

$$\lim_{t \to t_o} \frac{y\ t}{x\ t} \quad a \quad [R]$$

Alors la courbe admet une droite asymptotique $y \quad ax,$ on a alors deux cas :

i.

$\lim_{t \to t_o} y\ t - ax\ t$: On a une branche parabolique

ii.

$$\lim_{t \to t_o} y\ t - ax\ t \quad b \quad [R]$$

La courbe admet la droite Δ d'équation $y \quad ax \quad b$ comme asymptote

Si $y - ax - b \quad 0$ La courbe est au-dessus de l'asymptote

Si $y - ax - b \quad 0$ La courbe est au-dessous de l'asymptote

Exemple

$$\left.\begin{array}{l} x\ t \quad \frac{t^2}{1\ t} \\ y\ t \quad \frac{t^3}{1\ t} \end{array}\right\} t \neq -1$$

On a

$$\lim_{t\to -1^-} x\ t \quad - \quad \lim_{t\to -1^-} y\ t$$
$$\lim_{t\to -1}\ x\ t \qquad \lim_{t\to -1}\ y\ t \quad -$$

Il y a donc une branche infinie quand t tend vers -1 ;
On a

$$\lim_{t\to -1} \frac{y\ t}{x\ t} \quad -1$$

et

$$\lim_{t\to -1} y\ t \ - \ -1\ .x\ t \quad \lim_{t\to -1} t^2 \quad 1$$

La droite d'équation $y \quad -x \quad 1$ est donc asymptote à la courbe quand t tend vers -1.

Étude locale

Définition *Un point t_o D tel que f et g soient dérivables en t_o est dit* ***régulier*** *si et seulement si $\overrightarrow{OM}^{'}\ t_o\ \neq \vec{0}$*

Il est dit ***stationnaire*** *ou* ***singulier*** *si et seulement si $\overrightarrow{OM}^{'}\ t_o \quad \vec{0}$*

Si t_o est régulier la courbe C admet au point $M\ t_o$ une tangente dont le coefficient directeur est

$$m\ t_o \quad \frac{y'\ t_o}{x'\ t_o}$$

Vecteur Directeur de la tangente au point $M\ t_o$ et position de la courbe par rapport à cette tangente

D'après la formule de Taylor-Lagrange, on a au voisinage de t_o :

$$\overrightarrow{OM}\ t \quad \overrightarrow{OM}\ t_o \quad t - t_o\ \overrightarrow{OM}^{'}\ t_o \quad \ldots \quad \frac{t-t_o\ ^n}{n!}\overrightarrow{OM}^{n}\ t_o \quad t-t_o\ ^n\ \ t-t_o$$

où

$$\lim_{t\to t_o}\ t - t_o \quad 0$$

Définition *On appelle premier invariant de la courbe paramétrée en t_o* ***le plus petit entier strictement positif*** (*s'il existe* !) *p tel que*

$$\overrightarrow{OM}^{p}\ t_o\ \neq 0$$

On a dans ce cas :

$$\overrightarrow{M\ t_o\ M\ t} \quad \frac{t-t_o\ ^p}{p!}\overrightarrow{OM}^{p}\ t_o \quad t-t_o\ ^p\ \ t-t_o$$

D’où $\overrightarrow{M\ t_o\ M\ t}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}^{\ p}\ \ t_o$

Définition *On appelle second invariant* (*s’il existe*) *de la courbe paramétrée en* t_o *le plus petit entier* $q \quad p$ *tel que* $\overrightarrow{OM}^{\ q}\ \ t_o$ ***ne soit pas colinéaire*** *à* $\overrightarrow{OM}^{\ p}\ \ t_o$.

On a les quatre configurations suivantes :

1. Si p est impair et q est pair : $M\ t_o$ est un point ordinaire
2. Si p est impair et q est impair : $M\ t_o$ est un point d’inflexion
3. Si p est pair et q impair : $M\ t_o$ est un point de rebroussement de 1ère espèce
4. Si p est pair et q est pair : $M\ t_o$ est un point de rebroussement de seconde espèce

Plan d'étude

1. Ensemble de définition D
2. Étude des invariances de la courbe : Périodicités, invariance par translation, symétries.
3. Étude séparée des fonction $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$
4. Les résultats de l'étude précédente seront reportés dans le même tableau de variation

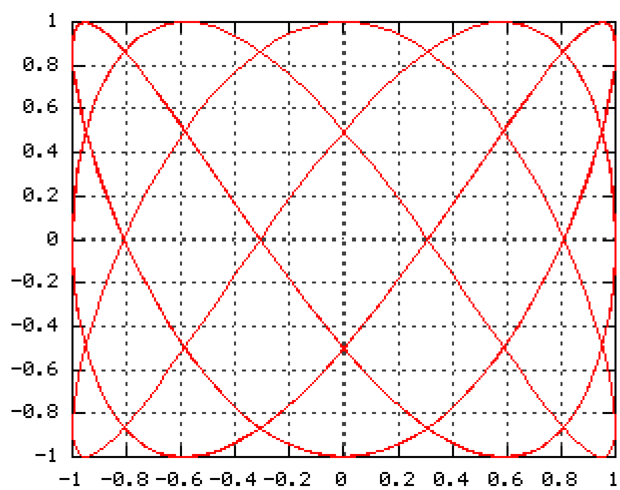
$\boldsymbol{t}$		
$f'(t)$		
$f(t)$		
$g'(t)$		
$g(t)$		
$m = \frac{g'(t)}{f'(t)}$		

5. Étude des branches infinies
6. Points remarquables (multiples, d'inflexions...)
7. Le tableau de variation et le graphe seront progressivement élaborés

Exemples :

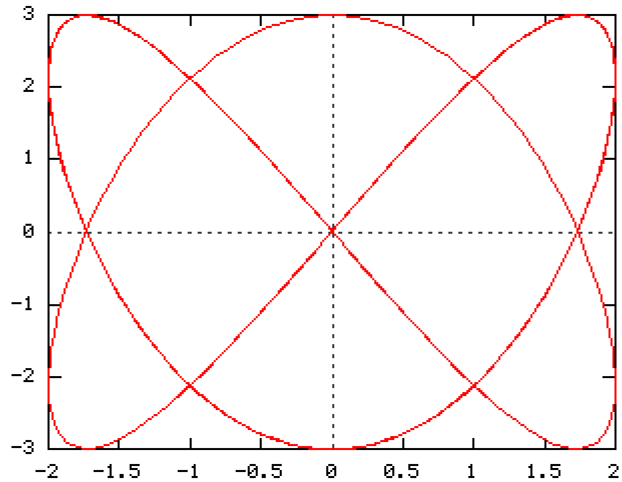
a. courbe de Lissajous

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \sin(3t) \\ y(t) &= \cos(5t) \end{aligned}\right\}$$



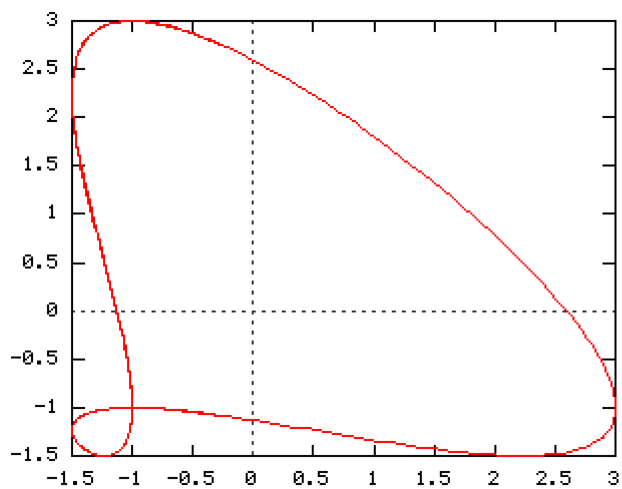
b. courbe de Lissajous

$$\left.\begin{array}{ll} x\ t & 2\sin\ 2t \\ y\ t & 3\sin\ 3t \end{array}\right\}$$



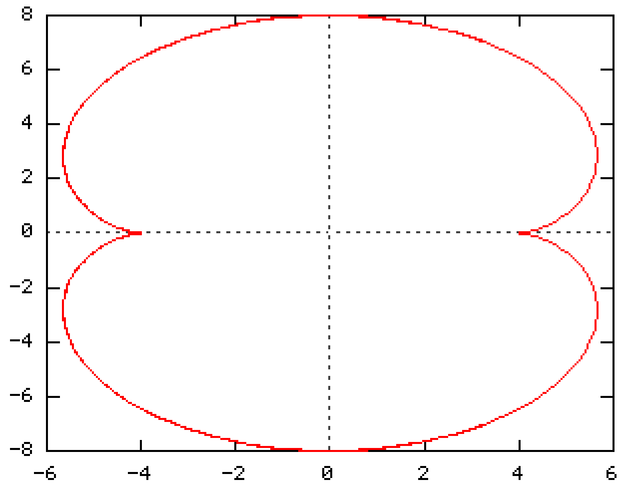
c. Deltoïde

$$\left.\begin{array}{ll} x\ t & 2\cos t \quad \cos\ 2t \\ y\ t & 2\sin t - \cos\ 2t \end{array}\right\}$$



d. Nephroïde

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = 2\left(3\cos t - \cos 3t\right) \\ y(t) = 2\left(3\sin t - \sin 3t\right) \end{array}\right\}$$



e. Astroïde

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = 2\cos^3(t) \\ y(t) = 2\sin^3(t) \end{array}\right\}$$