# Fonctions logarithme, exponentielles et puissances.

① La **fonction logarithme** que l'on note **ln** ( $x \mapsto \ln x$ avec $x > 0$) admet les propriétés suivantes :
Valeurs particulières : $\ln 1 = 0$ et on note $e$ le nombre qui vérifie $\ln e = 1$,

Propriétés algébriques : $\ln ab = \ln a + \ln b$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ et $\ln a^r = r \ln a$ avec $a > 0$ et $b > 0$.

Limites particulières : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Dérivées et tableau de variation : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ où $u$ est une fonction dérivable qui ne prend que des valeurs strictement positives.

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x) = \frac{1}{x}$ | | $-$ | $+$ |
| $f(x) = \ln x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

② La **fonction exponentielle** que l'on note ***e*** ( $x \mapsto e^x$ ) admet les propriétés suivantes :
Valeurs particulières : $e^0 = 1$, $e^1 = e$ et pour tout nombre $x$ on a $e^x > 0$ (une exponentielle est toujours strictement positive).

Propriétés algébriques : $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ et $(e^a)^n = e^{na}$.

Limites particulières : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Dérivées et tableau de variation : $(e^x)' = e^x$ et $(e^u)' = u'e^u$ où $u$ est une fonction dérivable.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x) = e^x$ | | $+$ | |
| $f(x) = e^x$ | $0$ | | $+\infty$ |

③ La **fonction exponentielle de base** $a$ (avec $a > 0$ et $a \neq 1$) que l'on note ***a*** ( $x \mapsto a^x = e^{x \ln a}$ ) admet les propriétés suivantes :
Valeurs particulières : $a^0 = 1$, $a^1 = a$ et pour tout nombre $x$ on a $a^x > 0$ (une exponentielle de base $a$ est toujours strictement positive).

Propriétés algébriques : $a^{x+y} = a^x a^y$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $(a^x)^y = a^{xy}$ et $(ab)^x = a^x b^x$.

Limites particulières : $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases}$.

Dérivées et tableaux de variation : $(a^x)' = (\ln a) a^x$ et $(a^u)' = (u' \ln a) a^u$ où $u$ est une fonction dérivable.

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x) = (\ln a) a^x$ | | $-$ | |
| $f(x) = a^x$ | $+\infty$ | | $0$ |

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x) = (\ln a) a^x$ | | $+$ | |
| $f(x) = a^x$ | $0$ | | $+\infty$ |

④ Les **fonctions puissances** ( $x \mapsto x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ avec $x > 0$ et $\alpha$ un réel fixé) admettent les propriétés suivantes :
Toutes les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.

Limites particulières : $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 0 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$ , $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$.

Dérivées et tableaux de variation : $\left(a^{x}\right)' = (\ln a) a^{x}$ et $\left(a^{u}\right)' = (u' \ln a) a^{u}$ où $u$ est une fonction dérivable.

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ | $-$ | |
| $f(x) = x^{\alpha}$ | $+\infty$ | $0$ |

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ | $+$ | |
| $f(x) = x^{\alpha}$ | $0$ | $+\infty$ |

⑤ **Croissance comparée** :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} \ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{\alpha} e^{x} = 0$ où α est strictement positif

⑥ **Courbes représentatives**.