CHAPITRE II

FONCTIONS NUMÉRIQUES

Généralités sur les fonctions numériques

Définition *Soit E et F deux ensembles ; on dit que f est une **application** (ou **fonction**) **de** E **dans** F si et seulement si :*

$$\boxed{\forall x \in E,\ \exists!\, y \in F \ / \ y = f(x)}$$

Au lieu de : "f est une application de E dans F" on peut écrire symboliquement :

$$f : E \to F$$

Définition *Soit $f : E \to F$ une application*

i. *On dit que f est **injective** ssi :*

$$\forall (x,x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

ii. *On dit que f est **surjective** ssi :*

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E \ / \ y = f(x)$$

iii. *On dit que f est **bijective** ssi f est à la fois injective et surjective.*

$$\forall y \in F,\ \exists x! \in E \ / \ y = f(x)$$

Définition *Une fonction numérique est une application d'une partie A de [R] à valeurs dans [R] .*

Définition *Soit $f : A \to$ [R] $(A \subset$ [R]$)$*

1. *f est **majorée** ssi :* $\exists M \in$ [R] $/ \ \forall x \in A,\ f(x) \leq M$
2. *f est **minorée** ssi :* $\exists m \in$ [R] $/ \ \forall x \in A,\ f(x) \geq m$
3. *f est **bornée** ssi : f est majorée et f est minorée*
4. *f est **croissante** ssi :* $\forall (x,y) \in A^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
5. *f est **décroissante** ssi :* $\forall (x,y) \in A^2,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$
6. *f est **strictement croissante** ssi :* $\forall (x,y) \in A^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
7. *f est **strictement décroissante** ssi :* $\forall (x,y) \in A^2,\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
8. *f est **monotone** sur A ssi f est croissante ou décroissante sur A*
9. *f est **strictement monotone** sur A ssi f est strictement croissante ou strictement décroissante sur A*

Étudier les variations de *f* sur *A*, c'est chercher à partager *A* en sous-ensembles tels que sur chacun d'eux *f* soit monotone.

Ensemble de définition

La première précision à obtenir lorsque l'on rencontre une fonction numérique *f* est son ensemble de définition D_f.

Exemple **1**. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ *où* $ad - bc \neq 0$, *alors* $D_f =$ [R] $\setminus \left\{\frac{-d}{c}\right\}$

2. $g\ x \quad \sqrt{3x-5}$, *il est nécessaire d'avoir* $3x-5 \geq 0 \quad x \geq \frac{5}{3}$ *d'où* $D_f \quad \left[\frac{5}{3};\quad\right[$

3. $h\ x \quad ln\ 5-4x$, *il est nécessaire d'avoir* $5-4x \quad 0 \quad x \quad \frac{5}{4}$ *d'où* $D_f \quad \left]- \ ;\frac{5}{4}\right[$

Périodicité

Définition *Soit* f : $[R] \to [R]$, *et* $T \quad [R]$ *on dit que* f *est* ***périodique*** *de* ***période*** T *si*

1. $x \quad [R]$, $x \quad D_f \quad x \quad T \quad D_f$

2. $x \quad [R]$, $f\ x \quad T \quad f\ x$

Exemple **3**. $f : x \quad cos\ 3x \quad 4$ *On cherche*

$$T\ /\ f\ x \quad T \quad f\ x \quad cos\ 3\ x \quad T \quad 4 \quad cos\ 3x \quad 4$$

$$3x \quad 3T \quad 4 \quad 3x \quad 4 \quad 2k \quad T \quad \frac{2}{3}k\ ,\ k \quad \mathbf{Z}$$

on prend la plus petite période strictement positive : $T \quad \frac{2}{3}$

4. $f : x \quad cos \quad x \quad , T \quad \frac{2}{\ }$

Parité

Soit f une fonction numérique, on dit que f est **paire** (resp. **impaire**) ssi :

$$x \quad D_f, \ -x \quad D_f \text{ et } f\ -x \quad f\ x \quad (\text{resp. } f\ -x \quad -f\ x$$

La question d'une éventuelle parité d'une fonction ne peut se poser que **si l'ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0**.

Il est d'usage de représenter les fonctions dans un repère cartésien, par exemple $O, \vec{i}, \vec{j}$ dans lequel on associe à tout couple x, y , avec $y \quad f\ x$, un point M défini par $\overrightarrow{OM} \quad x\vec{i} \quad y\vec{j}$

Si le repère est orthogonal, Oy est un axe de symétrie pour la courbe représentative d'une fonction paire.

L'origine O du repère est centre de symétrie pour la courbe représentative d'une fonction impaire.

Exemple $f : x \quad x^n, \ n \quad \mathbf{Z}$

1. *Pair* :

2. *Impair* :

Limites

Définition 1. *Soit a [R] , on appelle **voisinage** de a tout intervalle ouvert contenant a*

2. *Soit D [R] , $\overline{D}$ est l'ensemble des x / 0, x − ; x ∩ D ≠*

Définition *Soit f une fonction numérique définie sur une partie D de [R] . On dit que la fonction f admet pour limite l en a $\overline{D}$ ssi :*

$$0, \quad 0 \ / \quad x \quad D,\ 0 \quad |x - a| \quad |f\ x\ - l|$$

On écrira :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f\ x \quad l$$

Remarques :

- *f* peut-être ou non définie en *a*
- Il faut se méfier du côté intuitif de la notion de limite : "*f x* est aussi près que l'on veut du nombre *l* pourvu que *x* soit suffisamment proche de *a*"

  Exemple *E x max n* ***Z*** */ n ≤ x n'a pas de limite lorsque x tend vers* 2, *car pour* 1 *x* 2, *E x* 1 *d'où* |*E x* − 2| 1

Définition *On dit que la fonction f admet une limite à droite* (*resp. à gauche*) *en a ssi la restriction de f à D ∩ a*; (*resp. D ∩ − ; a*) *admet l pour limite. On écrit* :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x\ a}} f\ x \quad l \quad (resp.\ \lim_{\substack{x \to a \\ x\ a}} f\ x \quad l\ )$$

Algèbre des limites

Soient *f* et *g* deux fonctions définies sur un même ensemble *D* et admettant des limites (finies ou infinies) dans les mêmes conditions (i.e : losrque *x* tend vers x_o $\overline{[R]}$ à droite ou à gauche).

	$\lim f \quad l \quad [R]$	$\lim f$	$\lim f \quad -$
$\lim g \quad l' \quad [R]$	$\lim f \quad g \quad l \quad l'$	$\lim f \quad g$	$\lim f \quad g \quad -$
$\lim g$	$\lim f \quad g$	$\lim f \quad g$	$\lim f \quad g \quad ?$
$\lim g \quad -$	$\lim f \quad g \quad -$	$\lim f \quad g \quad ?$	$\lim f \quad g \quad -$

	$\lim f \quad l \quad [R]$	$\lim f$	$\lim f \quad -$
0	$\lim f \quad 0$	$\lim f \quad 0$	$\lim f \quad 0$
0	$\lim f \quad l$	$\lim f$	$\lim f \quad -$
0	$\lim f \quad l$	$\lim f$	$\lim f$

	$\lim f \quad l \neq 0$	$\lim f$	$\lim f \quad 0$
$\lim g \quad l' \neq 0$	$\lim f \quad g \quad l \quad l'$	$\lim f \quad g$	$\lim f \quad g \quad 0$
$\lim g$	$\lim f \quad g$	$\lim f \quad g$	$\lim f \quad g \quad ?$
$\lim g \quad 0$	$\lim f \quad g \quad 0$	$\lim f \quad g \quad ?$	$\lim f \quad g \quad 0$

$\lim f \quad l \neq 0$	$\lim f \quad 0$	$\lim f$	$\lim f \quad -$
$\lim \frac{1}{f} \quad \frac{1}{l}$	$\lim \frac{1}{f}$	$\lim \frac{1}{f} \quad 0$	$\lim \frac{1}{f} \quad 0^-$

Limite et Ordre

Proposition *Soit $f : D \to [R]$ et $x_o \quad \overline{D}$, si au voisinage de x_o on a $f\ x \ \geq 0$ et si :*

$$\lim_{x \to x_o} f\ x \quad l$$

alors $l \geq 0$

[Preuve] Par l'absurde : Supposons $l \quad 0$. Alors :

$$pour \quad \frac{-l}{2}, \quad 0, \quad x \quad D,\ 0 \quad |x - x_o| \quad |f\ x - l| \quad \frac{-l}{2}$$

$$f\ x - l \quad \frac{-l}{2}$$

$$f\ x \quad \frac{l}{2} \text{ Absurde !}$$

[Fin Preuve]

Corollaire *Soient f et g deux fonctions définies sur D et $x_o \quad \overline{D}$, si au voisinage de x_o on a :*

$$f\ x \quad \leq g\ x$$

et si f et g admettent des limites en x_o, *on aura* :

$$\lim_{x\to x_o} f\ x \quad \leq \lim_{x\to x_o} g\ x$$

Corollaire *Soient* f, g, h *trois fonctions définies sur* D *et* $x_o \quad \overline{D}$, *si au voisinage de* x_o *on a* :

$$f\ x \quad \leq g\ x \quad \leq h\ x$$

et si

$$\lim_{x\to x_o} f\ x \qquad \lim_{x\to x_o} h\ x \qquad l$$

alors

$$\lim_{x\to x_o} g\ x \qquad l$$

Équivalence de fonctions

Définition *Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de* x_o. *On dit que f est* ***équivalente*** *à g* ***au voisinage de*** $\boldsymbol{x_o}$ *si l'on peut trouver une fonction définie sur un voisinage de* x_o *vérifiant* :

$$\lim_{x\to x_o} \quad x \qquad 1 \ \text{ et } f\ x \qquad x \quad g\ x \ \text{ dans un voisinage de } x_o$$

On écrira alors :

$$f\ x \quad {}_{x_o}\ g\ x$$

Si g ne s'annule pas dans un voisinage I de x_o *on a* :

$$\lim_{\substack{x\to x_o \\ x\ I}} \frac{f\ x}{g\ x} \qquad 1$$

1. **Tout polynôme non nul est équivalent à l'infini à son terme de plus haut degré**. Si $P\ x \qquad 3x^4 - 5x^3 \quad 2x^2 - 8x \quad 10$, alors

$$P\ x \qquad 3x^4$$

2. **Tout polynôme non nul est équivalent au voisinage de zéro à son terme de plus bas degré**. Avec l'exemple précédent

$$P\ x \quad {}_0\ 10$$

On retiendra :

$$\sin x \quad {}_0\ x \qquad\qquad \ln\ 1 \quad x \quad {}_0\ x$$

$$\cos x \quad {}_0\ 1 - \frac{x^2}{2} \qquad\qquad e^x \quad {}_0\ 1 \quad x$$

$$\tan x \quad {}_0\ x \qquad\qquad 1 \quad x \qquad {}_0\ 1 \qquad x,\ \text{ pour tout } \qquad [R]$$

Exemple *Soit*

$$f\ x \qquad \frac{1 - cos\,x \ \ sin^2 x}{2x^4}$$

Alors au voisinage de zéro on a :

$$f\ x \quad {}_{0} \quad \frac{\frac{x^2}{2} \quad x^2}{2x^4} \quad \frac{1}{4}$$

D'où

$$\lim_{x \to 0} f\ x \quad \frac{1}{4}$$

Continuité

Définition *Soit f une fonction définie sur D et soit x_o D. On dit que f est* ***continue*** *en x_o ssi* :

$$\lim_{x \to x_o} f\ x \quad f\ x_o$$

$$0, \qquad 0, \quad x \quad D, \ |x - x_o| \qquad |f\ x \ - f\ x_o\ |$$

Proposition *Si f et g sont deux fonctions continues en x_o, il en est de même des fonctions $f \quad g$, $f \quad g$, $\quad f$ et si $g\ x_o \ \neq 0$ de $\frac{f}{g}$ (dans un certain voisinage de x_o*

Définition *Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications. On appelle* ***composée de f et de g*** *l'application* :

$$h : E \to G$$

définie par

$$h\ x \quad g\ f\ x$$

on la note :

$$h \quad g \quad f$$

Théorème *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et continue en un point x_o, soit g une fonction définie sur $f\ I$ et continue au point $y_o \quad f\ x_o$. Alors $g \quad f$ est continue en x_o.*

Définition *Soit f une fonction d'une partie D de [R] dans [R] . On dit que f est continue sur D si f est continue en tout point de D.*

Théorème (**des valeurs intermédiaires**) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, alors l'image $f\ I$ est également un intervalle.* (*I n'est supposé ni fermé ni borné à priori*).

Autre formulation :

On comprendra mieux le nom de ce théorème en le formulant ainsi :

Si une fonction *f* est définie et continue sur un intervalle *I*, dès que *f* prend deux valeurs distinctes, elle prend également toute valeur intermédiaire entre ces deux valeurs. Nous l'utiliserons souvent sous la forme particulière suivante : Si *f* prend au moins une valeur négative et au moins une valeur positive, alors *f* s'annule en au moins un point. D'où le corollaire :

Corollaire *Soit f une fonction numérique* ***continue*** *sur a, b telle que $f\ a \quad f\ b \quad 0$ alors il existe $c \quad a, b$ tel que $f\ c \quad 0$*

vide

Théorème *Soit f une fonction* ***définie et continue sur un intervalle fermé et borné*** *I,* ***alors*** *f* ***est borné sur*** *I*

Théorème *Soit f une fonction* ***définie et continue sur un intervalle fermé et borné*** *I,* ***alors*** *f* ***atteint ses bornes*** (*i.e* : $c \quad I \,/\, f\, c \quad sup_{x\ I} f\, x$ et $c' \quad I \,/\, f\, c' \quad inf_{x\ I} f\, x$

Corollaire *Soit f une fonction* ***définie et continue sur un intervalle fermé et borné*** *I,* ***alors*** *$f\ I$* ***est un intervalle fermé et borné****.*

Fonctions monotones et fonctions réciproques

Soient E et F deux ensembles quelconques et $f : E \to F$ une application. Inverser, pour la composition , c'est chercher s'il existe $g : F \to E$ telle que l'on ait :

$$f \quad g \quad id_F \text{ et } g \quad f \quad id_E$$

i.e :

$$x \quad E,\ y \quad f\, x \qquad x \quad g\, y$$

On notera g par f^{-1}

Exemple **1**. *Soit $f :$ [R] $\to$ [R] définie par $f\, x \quad x^2$ alors $f^{-1}\ x \quad \sqrt{x}$*

2. *Soit $f :$ [R] $\to$ [R] définie par $f\, x \quad e^x$ alors $f^{-1} \quad ln \ :$ [R] $\to$ [R]*

Rapports entre monotonie et inversibilité

Lemme *Soit f une application numérique et $E \quad D_f$. Si f est monotone sur E on a* :

f injective sur E $\quad$ ***f strictement monotone sur E***

[Preuve] Supposons par exemple que f soit croissante sur E (sinon il suffit de considérer $-f$

Si f est injective, on a :

$$x,x' \quad E^2,\ x \quad x' \quad \begin{cases} x \neq x' \\ x \leq x' \end{cases} \quad \begin{cases} f\,x \;\neq f\,x' & \text{(car } f \text{ est injective)} \\ f\,x \;\leq f\,x' & \text{car } f \text{ est supposée croissante)} \end{cases}$$

D'où :

$$x \quad x' \quad f\,x \quad f\,x' \quad \text{et } f \text{ est bien strictement croissante}$$

Si f est strictement croissante, on a :

$$x,x' \quad E^2,\ x \neq x' \quad \begin{cases} x \quad x' \\ ou \\ x' \quad x \end{cases} \quad \begin{cases} f\,x \quad f\,x' \\ ou \\ f\,x' \quad f\,x \end{cases} \quad f\,x \;\neq f\,x'$$

D'où :

$$x \neq x' \quad f\,x \;\neq f\,x' \quad \text{et } f \text{ est bien injective}$$

[Fin Preuve]

Proposition *Soit f une application numérique* ***strictement monotone*** *sur E* $\quad D_f$, *alors f définit une bijection de E sur f E* .

[Preuve] Par le lemme f est bien injective, comme f est évidemment une surjection sur $f\,E$, f est donc bijective sur son image. [Fin Preuve]

D'où la proposition :

Proposition *Soit f une fonction* ***continue et strictement monotone*** *sur un intervalle I alors f admet une fonction réciproque notée* f^{-1} *qui est une* ***bijection*** *de f I sur I.*

Proposition *Soit f une fonction* ***continue strictement monotone*** *sur I, alors sa fonction réciproque* f^{-1} *est* ***strictement monotone*** *sur f I et* ***de même sens*** *que f.*

[Preuve] f^{-1} étant une bijection elle est nécessairement strictement monotone. Montrons que la stricte monotonie de f^{-1} est de même sens que f.

Soient $y,y' \quad f\,I\;^2$ avec $y \neq y'$ et considérons le taux d'accroissement :

$$T \quad \frac{f^{-1}\,y\; - f^{-1}\,y'}{y - y'}$$

! $x,x' \quad I^2 \;/\; x \quad f^{-1}\,y$ et $x' \quad f^{-1}\,y'$ on a $y \quad f\,x$ et $y' \quad f\,x'$ et $x \neq x'$, d'où

$$T \quad \frac{x - x'}{f\,x\; - f\,x'}$$

Par conséquent le signe du taux d'accroissement de f^{-1} est le même que le signe du taux d'accroissement de f, ce qui achève la preuve. [Fin Preuve]

Représentation graphique de f^{-1}

Soit f une fonction bijective d'un intervalle I sur $f\ I$. Alors si $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad C_f$, c'est-à-dire :

$$x \quad I \text{ et } y \quad f\,x \qquad y \quad f\,I\,,\ x \quad f^{-1}\,y \text{ et } M'\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix} \quad C_{f^{-1}}.$$

Or les points M et M' sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ . Donc $C_{f^{-1}}$ se déduit de C_f par symétrie orthogonale d'axe (Δ .