

Fonction réciproque

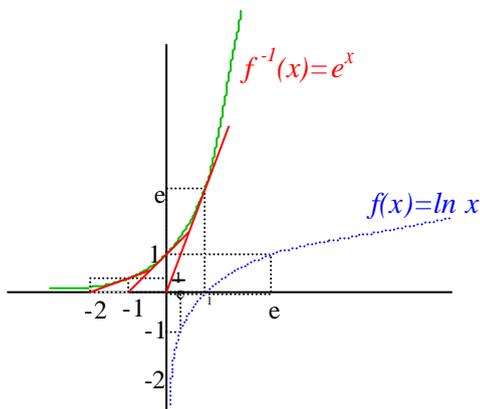
1. DEFINITION, EXEMPLES

Th : Toute fonction f définie sur un intervalle I , continue et strictement monotone sur cet intervalle réalise une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle image J .

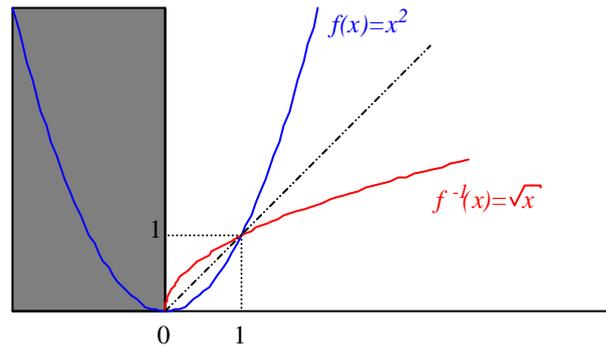
Conséquences :

1. Tout nombre réel de l'intervalle J admet un unique antécédent dans I par la fonction f .
2. La fonction f admet une fonction réciproque définie sur J et notée f^{-1} .

Ex : Logarithme et exponentielle



Carré et racine carrée



Prop : Si f est définie, strictement monotone et dérivable sur I alors f admet une fonction réciproque dérivable sur $J = f(I)$ et $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Ex : $f(x) = x^2$ donc $\begin{cases} f'(x) = 2x \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x} \end{cases}$ on peut alors écrire $f'(f^{-1}(x)) = 2f^{-1}(x) = 2\sqrt{x}$ d'où $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \ln x$ donc $\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ f^{-1}(x) = e^x \end{cases}$ on peut alors écrire $f'(f^{-1}(x)) = \frac{1}{f^{-1}(x)} = \frac{1}{e^x}$ d'où $(e^x)' = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$

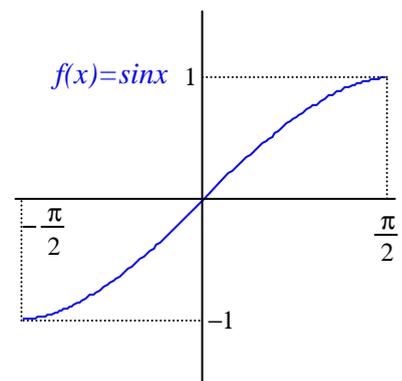
2. FONCTIONS RECIPROQUES DES FONCTIONS USUELLES

2.1 Fonction \arcsin

La fonction $f(x) = \sin x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

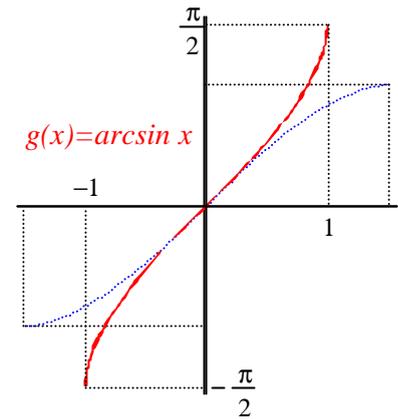
Pour obtenir une fonction strictement monotone on se place sur

l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$.



Def : La fonction réciproque de la fonction sinus est la fonction arcsinus définie sur l'intervalle $[-1; 1]$ par : $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$

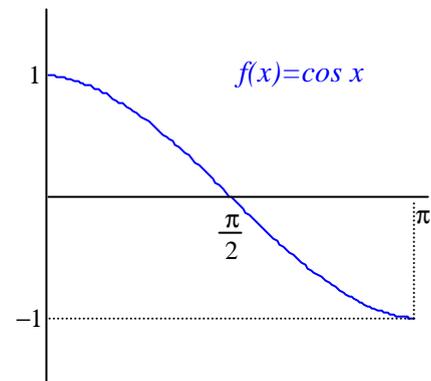
Prop : La fonction $g(x) = \arcsin x$ est dérivable sur l'intervalle $]-1; 1[$ de dérivée $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



2.2 Fonction ² arccosinus ²

La fonction $f(x) = \cos x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

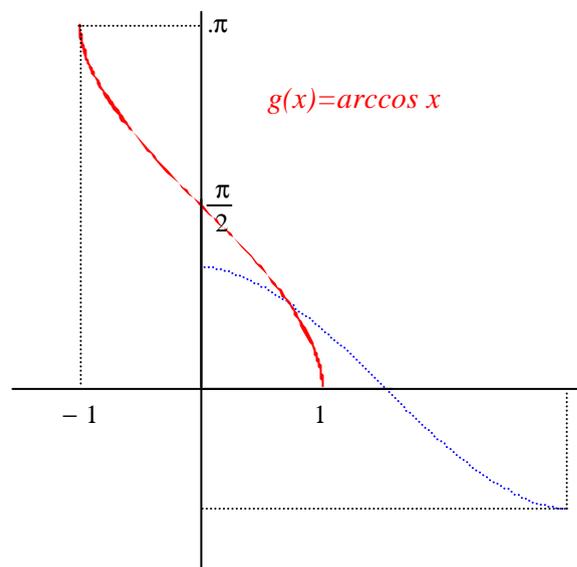
Pour obtenir une fonction strictement monotone on se place sur l'intervalle $I = [0; \pi]$.



Def : La fonction réciproque de la fonction cosinus est la fonction arccosinus définie sur l'intervalle $[-1; 1]$ par : $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$

Prop : La fonction $g(x) = \arccos x$ est dérivable sur l'intervalle $]-1; 1[$

de dérivée $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$



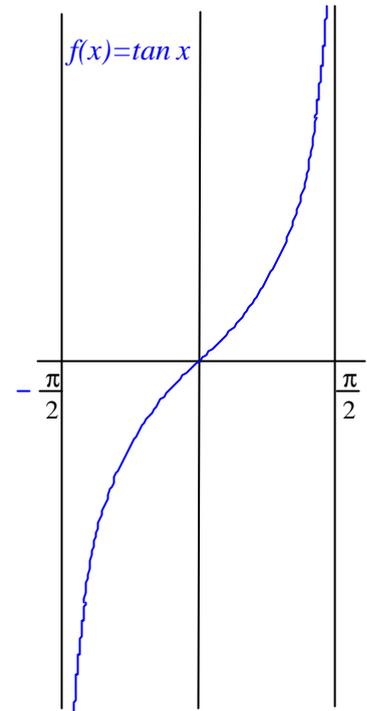
2.3 Fonction ² arctangente ²

La fonction $f(x) = \tan x$ est définie et dérivable

sur $\mathbb{R} / \{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$.

Pour obtenir une fonction strictement monotone on

se place sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$



Def : La fonction réciproque de la fonction tangente est la fonction arctangente définie sur \mathbb{R} par :

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$$

Prop : La fonction $g(x) = \arctan x$ est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

