Dérivée

<u>Fonction Dérivée</u> (rappel)

Si une fonction f est dérivable en tout point x_0 d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I, et l'application qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f au point x est appelée fonction dérivée de f. La fonction dérivée de f est notée f'.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- u + v dérivables sur I, on a : $(u+v) = u' + v'$
- u et v dérivables sur I, on a : $(u.v)' = u'.v + u.v'$
- Si $a \in \mathbb{R}$, u est dérivable sur I, on a : $(a.u)' = a.u'$
- Si u ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{u}$ est dérivable : $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$
- Si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$
- Si u est strictement positive sur I, on a : $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- Si u et u^n sont dérivables sur I, on a : $(u^n)' = n.\, u'.\, u^{n-1}$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I,
si v est une fonction dérivable sur un intervalle J, et si pour tout $x \in$ I, $u(x) \in$ J,
alors $v \circ u$ est dérivable sur I et on a $\boldsymbol{(v \circ u)' = u' \,.\, (v' \circ u)}$

<u>Applications aux variations d'une fonction</u>

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I,

- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.
- Si f' est positive ou nulle sur I, alors f est croissante sur I.
- Si f' est négative ou nulle sur I, alors f est décroissante sur I.

- Pour démontrer qu'une fonction f est **strictement croissante** sur I, il suffit de démontrer que f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points.

(Propriété similaire pour une fonction strictement décroissante)

<u>Théorème des valeurs intermédiaires (ou de la bijection)</u>

Soit f une fonction dérivable sur $[a\,;\,b]$ telle que $f'(x) > 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{]a\,;\,b[}$ (avec $a < b$). Pour tout élément $\boldsymbol{k} \in \boldsymbol{[f(a)\,;\,f(b)]}$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a\,;\,b]$.

On dit qu'elle **réalise une bijection** de I sur f(I)

(Propriété similaire avec une fonction dont la dérivée est strictement négative)