I SYSTEMES D'EQUATIONS

Définition :

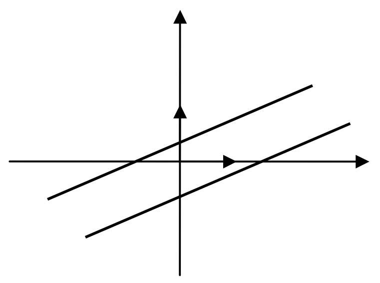
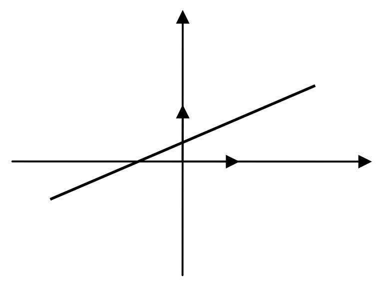
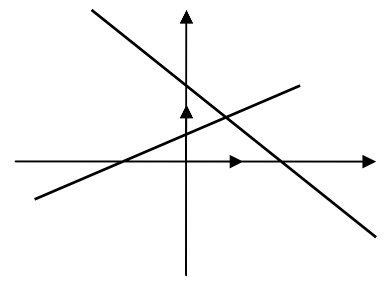
On appelle système linéaire de deux équations à deux inconnues, x et y, tout système qui peut se mettre sous la forme (S) $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b't = c' & (2) \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels donnés.

Interprétation graphique :

Soit le système (S) dans lequel nous supposons (a ;b) $\neq$ (0 ;0) et (a' ;b') $\neq$ (0 ;0). Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, les équations (1) et (2) sont des équations cartésiennes de deux droites (D1) et(D2).

Un couple (x ;y) de nombres est solution de (S) si, et seulement si, le point M(x ;y) appartient à (D1) et à (D2).

Résoudre (S) revient donc à étudier la position relative des droites (D1) et (D2).

(D1) et (D2) sont strictement parallèles	(D1) et (D2) sont confondues	(D1) et (D2) sont sécantes
		
ab'-a'b=0		ab'-a'b $\neq$ 0
(S) n'a aucune solution	(S) a une infinité de solutions	(S) a une solution unique : les coordonnées du point d'intersection.

Propriété :

Le système (S) tel que ab'-a'b est non nul admet une, et une seule, solution.

Méthodes numériques de résolution :

1° Résolution par la méthode de substitution :

La méthode consiste à exprimer x (resp. y) en fonction de y (resp. x) dans une des deux équations puis à reporter cette expression dans l'équation restante.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 4y = -1 \end{cases}$$

2° Résolution par la méthode d'addition :

La méthode consiste à ajouter membre à membre les deux équations lorsque celles-ci ont des coefficients opposés pour l'une des deux inconnues, celle-ci se trouvant alors éliminée et l'on peut donc trouver la valeur de l'inconnue restante.

Exemple :

$$\begin{cases} 5x - 3y = 17 \\ -8x + 3y = -29 \end{cases}$$

3° Résolution par la méthode de combinaison linéaire :

Cette méthode consiste à transformer le système afin de se retrouver dans la configuration précédente, on élimine donc l'une des inconnues en combinant les deux équations. Pour cela on peut multiplier les deux membres d'une équation par un nombre non nul puis ajouter ou retrancher membre à membre les deux équations ainsi obtenues.

Exemple :

$$\begin{cases} 3x-4y=29 \\ 4x-5y=37 \end{cases}$$

4° Résolution par la méthode comparaison :

La méthode consiste à exprimer dans chacune des équations y en fonction de x, ou inversement x en fonction de y, on identifie alors les deux expressions obtenues et on en déduit x, ou inversement y, puis y, ou inversement x.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x-y=11 \\ 4x+2y=-6 \end{cases}$$

5° Résolution par la méthode graphique :

On trace les droites (D1) et (D2) d'équations cartésiennes respectives ax+by=c et a'x+b'y=c', le couple solution est alors donné par la lecture des coordonnées du point d'intersection de ces deux droites.

Exemple :

$$\begin{cases} 3x-y=1 \\ -x+2y=3 \end{cases}$$

Résolution d'un système se ramenant à un système linéaire, changement de variable.

Soit à résoudre $(S)\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=0 \\ -\frac{4}{x}+\frac{9}{y}=-5 \end{cases}$, on utilise alors le changement de variable : $\begin{cases} X=\frac{1}{x} \\ Y=\frac{1}{y} \end{cases}$, le système (S) s'écrit alors $\begin{cases} 2X+3Y=0 \\ -4X+9Y=-5 \end{cases}$, après l'avoir résolu, il ne faut pas oublier que ce que l'on cherche c'est x et y, que l'on obtient en utilisant $x=\frac{1}{X}$ et $y=\frac{1}{Y}$.

Application :

Résoudre les systèmes : a) $\begin{cases} \sqrt{x}+4\sqrt{y}=8 \\ 3\sqrt{x}-5\sqrt{y}=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2-3y^2=6 \\ x^2+4y^2 25 \end{cases}$

Mise en équation de problèmes conduisant à un système d'équations.

Vous avez vu au collège des problèmes dans lesquels on cherchait deux nombres et qui se résolvaient à l'aide d'une équation à une inconnue.

Exemple :

Jacques a cassé sa tirelire, elle contenait 460 Francs en pièces de 5 Francs et de 10 Francs. Sachant qu'il y avait en tout 57 pièces, combien y avait-il de pièces de 5 Francs ? de pièces de 10 Francs ?

Il existe cependant des problèmes qui nécessitent l'introduction de deux inconnues pour être résolus, ils conduisent alors à un système de deux équations à deux inconnues.

Exemples :

1) En terrasse : « Deux Cocas, trois Oranginas : 66 Francs »
« Trois Cocas, cinq Oranginas : 105 Francs »
Combien le Coca ? l'Orangina ?

2) Au restaurant : Des personnes ont toutes pris le même menu. Si elles donnent chacune 75 Francs, il manque au total 28 Francs ; si elles donnent chacune 85 Francs, le restaurant leur rend 42 Francs.
Retrouver le nombre de convives ainsi que le prix du repas par personne.

3) Au théâtre : La salle compte 400 places. Les « parterres » sont à 150 Francs et les « balcons » sont à 120 Francs. Quand le théâtre est plein, la recette est de 53400 Francs.
Combien y a-t-il de « parterres » ? de « balcons » ?

II SYSTEMES D'INEQUATIONS

1°) Régionnement du plan.

Quel est l'ensemble des points M(x ;y) du plan dont les coordonnées vérifient l'équation 2x-y+3=0 ?

Quel est l'ensemble des points M(x ;y) du plan dont les coordonnées vérifient l'inéquation $2x-y+3<0$?
Quel est l'ensemble des points M(x ;y) du plan dont les coordonnées vérifient l'inéquation $2x-y+3>0$?

La droite (D) d'équation $ax+by+c=0$ partage le plan en deux demi-plans ouverts :
- Un demi-plan (P1), ensemble des points M(x ;y) dont les coordonnées vérifient $ax+by+c<0$.
- Un demi-plan (P2), ensemble des points M(x ;y) dont les coordonnées vérifient $ax+by+c>0$.

2°) Résolution graphique d'une inéquation à deux inconnues.

Résolvons graphiquement l'inéquation d'inconnue (x ;y) : $3x+y-2<0$.
On trace (D) d'équation $3x+y-2=0$, (D) partage le plan en deux demi-plans (P1) et (P2), on détermine alors celui qui correspond à $3x+y-2<0$.

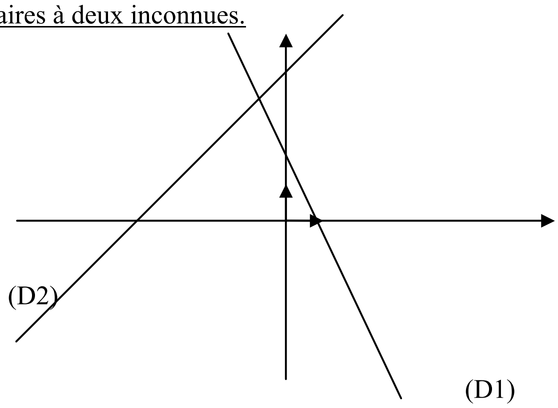
Application :

Résoudre de façon analogue $x+y-1\geq 0$; $x-2y+3<0$; $x-y+4>0$.

3°) Résolution graphique d'un système d'inéquations linéaires à deux inconnues.

La méthode consiste à résoudre séparément chacune des inéquations. L'ensemble des solutions du système sera alors l'intersection des ensembles de solutions de chacune des inéquations.

Soit à résoudre $(S)\begin{cases}2x+y-2<0 & (1)\\ x-y+4<0 & (2)\end{cases}$, on trace tout d'abord les droites (D1) et (D2) d'équations respectives (1) et (2), puis on résout graphiquement chacune des inéquations.



Application :

Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations suivants :

$(S1)\begin{cases}-2x+y-2>0\\ x+y+1<0\end{cases}$

$(S2)\begin{cases}x+y<0\\ x+3y+1\geq 0\\ -x+2y-1<0\end{cases}$