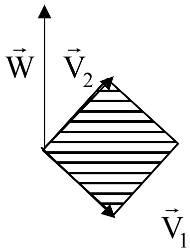
Produit vectoriel de deux vecteurs :

* **Définition** : Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est défini par

$$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \text{ avec } \|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \|\vec{V}_1\|\|\vec{V}_2\| \left| \sin(\widehat{\vec{V}_1, \vec{V}_2}) \right|$$

tq $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{W})$ forme un trièdre direct et $\|\vec{W}\|$ représente la surface du parallélogramme construit sur $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

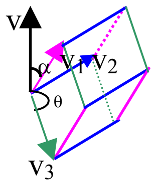


✦ Propriétés :

- $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = - \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$
- $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$
- Produit mixte $\vec{V}_1 . (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_2 . (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) = \vec{V}_3 . (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$

La valeur absolue du produit mixte représente le volume du parallélépipède de côtés $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$. $\quad \vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3 = \|\vec{V}_2\| \, \|\vec{V}_3\| \sin\theta$

$\vec{V}_1 . (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \|\vec{V}_1\| \, \|\vec{V}_2\| \, \|\vec{V}_3\| \sin\theta \cos\alpha$



- $\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_2 (\vec{V}_1 . \vec{V}_3) - \vec{V}_3 (\vec{V}_1 . \vec{V}_2)$

double produit vectoriel (Formule de Gibbs)

- $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\right) = \dfrac{d\vec{V}_1}{dt} \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \dfrac{d\vec{V}_2}{dt}$
- $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_1 = \vec{0}$ et/ou $\vec{V}_2 = \vec{0}$ ou $\vec{V}_1 // \vec{V}_2$
- $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{vmatrix}$

$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k}$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & -\vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$

Exemple :

La base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On a $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ et $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$