Lois de probabilité

I Loi binomiale

Définition

On appelle épreuve de Bernoulli une épreuve ayant deux éventualités :
l'éventualité S avec la probabilité p et l'éventualité $\overline{S}$ avec la probabilité $1 - p$.

Remarque

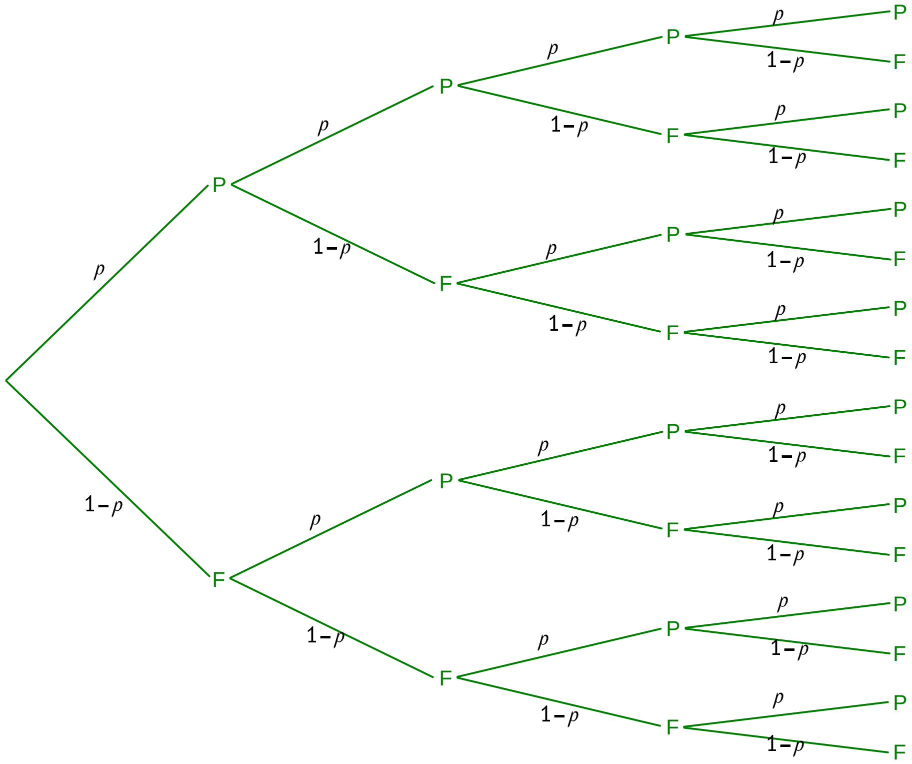
L'éventualité S correspondra souvent au "succès" d'une expérience, $\overline{S}$ étant alors l'échec.

Exemple

On jette une pièce de monnaie.
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, les deux éventualités sont P : "Pile" et F : "Face".

Notons p(P) = p et p(F) = $1 - p$ (si la pièce est équilibrée, on a p(P) = p(F) = $\frac{1}{2}$).

On répète quatre fois, de façon indépendante, le jet de cette pièce.
On peut traduire la situation par un arbre pondéré :



La probabilité d'obtenir la suite (P ; P ; F ; P) est $p \times p \times (1 - p) \times p = p^3(1 - p)$
La probabilité d'obtenir trois fois Pile sur les quatre lancers est la probabilité de l'événement :
{(P ; P ; P ; F) ; (P ; P ; F ; P) ; (P ; F ; P ; P) ; (F ; P ; P ; P)}. Elle est égale à $4 \times p^3(1 - p)$.
Le nombre 4 correspond au nombre de choix des positions des trois P dans la séquence de quatre (ou, ce qui est identique, au nombre de choix de la position du F dans la séquence de quatre), c'est-à-dire $\binom{4}{3}$

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de "Pile" obtenus sur les quatre lancers.

On a X(Ω) = {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4} et on a justifié que p(X=3) = $\binom{4}{3} p^3(1 - p)$

La loi de probabilite de X est alors donnée par :

x_i	0	1	2	3	4
p(X=x_i)	$\binom{4}{0} p^0(1 - p)^4$	$\binom{4}{1} p^1(1 - p)^3$	$\binom{4}{2} p^2(1 - p)^2$	$\binom{4}{3} p^3(1 - p)^1$	$\binom{4}{4} p^4(1 - p)^0$

Exercice 01

1°)On répète trois fois, de façon indépendante, le jet d'une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de "Pile" obtenus sur les trois lancers.
Donner la loi de probabilité de X.
Justifier que $E(X) = \frac{3}{2}$ et $V(X) = \frac{3}{4}$

2°)On répète trois fois, de façon indépendante, le jet d'une pièce de monnaie.
À chaque lancer la probabilité d'obtenir "Pile" est p.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de "Pile" obtenus sur les trois lancers.
Donner la loi de probabilité de X.
Justifier que $E(X) = 3p$ et $V(X) = 3p(1 - p)$

3°)On répète quatre fois, de façon indépendante, le jet d'une pièce de monnaie.
À chaque lancer la probabilité d'obtenir "Pile" est p.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de "Pile" obtenus sur les quatre lancers.
Justifier que $E(X) = 4p$ et $V(X) = 4p(1 - p)$

Définition

On appelle schéma de Bernoulli, la répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

Propriété

On considère un schéma de Bernoulli consistant en la répétiton n fois d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès S est p.
Si on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus sur les n répétitions,
la loi de probabilité de X est donnée par :

pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

Définition

Lorsqu'une variable aléatoire X prenant les valeurs $0 ; 1 ; ... ; n$ a pour loi de probabilité :

$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

on dit que X a pour loi de probabilité la loi binomiale de paramètres n et p.
Cette loi est parfois notée $B(n;p)$

Propriété (admise)

La loi binomiale de paramètres n et p a pour espérance mathématique $E(X) = np$ et pour variance $V(X) = np(1 - p)$

Exercice 02

On jette douze fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
Quelle est la probabilité d'obtenir cinq fois pile ? Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?

Exercice 03

Un candidat doit répondre à un QCM (questionnaire à choix multiples) comportant 10 questions.
Pour chaque question quatre réponses sont proposées ; une de ces quatre réponses est juste, les trois autres sont fausses.
Le candidat répond au hasard aux dix questions. Caculer les probabilités suivantes :
1°)Le candidat a dix réponses réponses justes.
2°)Le candidat a exactement trois réponses justes.
3°)Le candidat a au moins une réponse juste.
4°)On note X le nombre de réponses justes.
a) Quelle est l'espérance mathématique de X ?
b) Comment peut-on noter un tel QCM pour que les candidats qui répondent au hasard aient en moyenne 0 ?

Exercice 04

Une boîte contient 8 cubes :

- 1 gros rouge et 3 petits rouges
- 2 gros verts et 1 petit vert
- 1 petit jaune

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur).
Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1°)On note A l'événement : «obtenir des cubes de couleurs différentes»
B l'événement : «obtenir au plus un petit cube»

a) Calculer la probabilité de A.

b) Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$.

2°)Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.

a) Donner la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3°)L'enfant répète n fois l'épreuve «tirer simultanément trois cubes de la boîte», en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants.
On note P_n la probabilité que l'événement B soit réalisé au moins une fois.

a) Déterminer P_n en fonction de n.

b) Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n \geqslant 0{,}99$

Exemples de lois de probabilité continues

On peut définir une loi de probabilité sur un univers infini Ω en utilisant la notion de densité.

Loi uniforme sur [0 ; 1]

Imaginons que l'on veut modéliser le choix, au hasard, d'un nombre réel dans l'intervalle $[0 ; 1]$.
Le choix se faisant au hasard, on dira que la loi est la loi uniforme sur $[0 ; 1]$.
Chaque nombre réel doit avoir la même probabilité, mais comme il y a une infinité de nombres réels dans $[0 ; 1]$, on ne peut pas affecter à chacun d'eux une probabilité non nulle.
Chaque nombre réel a donc une probabilité nulle, mais on pourra s'intéresser à la probabilité que le réel choisi se trouve dans un intervalle $[a ; b]$ contenu dans $[0 ; 1]$.
La probabilité pour que le réel choisi au hasard soit compris entre a et b avec $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$, que l'on note $p([a ; b])$ est alors proportionnelle à l'amplitude de l'"intervalle $[a ; b]$.
De plus on doit avoir $p([0 ; 1]) = 1$, car l'événement "le nombre est dans $[0 ; 1]$" est l'événement certain.
On a donc $p([a ; b]) = b - a$.
On aura par exemple $p([0{,}5 ; 0{,}6]) = 0{,}1 = \frac{1}{10}$: la probabilité que le nombre choisi soit compris entre 0,5 et 0,6 est $\frac{1}{10}$, ce qui est conforme à l'intuition.

Pour tout intervalle $[a ; b]$ contenu dans $[0 ; 1]$, on peut aussi écrire $p([a ; b]) = \int_a^b 1\,dx$

On dit que la loi uniforme sur $[0 ; 1]$ est une loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = 1$.

Remarque

La probabilité d'un nombre réel étant nulle, on a : $p([a ; b]) = p(]a ; b]) = p([a ; b[) = p(]a ; b[)$

Exercice 05

On choisit un nombre réel α au hasard dans $[0 ; 1]$.
Quelle est la probabilité que, dans l'écriture décimale de α, le premier nombre après la virgule soit un 3 ?
Quelle est la probabilité que, dans l'écriture décimale de α, le premier nombre après la virgule soit pair ?

Exercice 06

On choisit un nombre réel α au hasard dans $[0\,;\,1]$.
Sachant que ce nombre α est supérieur à 0,6, quelle est la probabilité pour qu'il soit inférieur à 0,95 ?
Sachant que ce nombre α est supérieur à 0,963, quelle est la probabilité pour que dans l'écriture décimale de α, le deuxième chiffre après la virgule soit multiple de 3 ?

Exercice 07

On veut modéliser le choix d'un nombre réel dans $[0\,;\,1]$ par une loi (non uniforme) ayant pour densité la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \lambda x$ où λ est un réel fixé.
Justifier que ceci n'est possible qu'avec un seul réel λ que l'on déterminera.
Donner alors la valeur de $p\left(\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]\right)$; $p\left(\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]\right)$; $p([0{,}3\,;\,0{,}4])$

Exercice 08

On veut modéliser le choix d'un nombre réel dans $[0\,;\,1]$ par une loi (non uniforme) ayant pour densité la fonction f définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \lambda x^2$ où λ est un réel fixé.
Justifier que ceci n'est possible qu'avec un seul réel λ que l'on déterminera.
Donner alors la valeur de $p\left(\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]\right)$; $p\left(\left[\frac{1}{2}\,;\,1\right]\right)$; $p([0\,;\,0{,}1])$; $p([0{,}9\,;\,1])$

Loi exponentielle

Cette loi modélise le phénomène de "mort sans vieillissement", observé par exemple pour la désintégration radioactive.
La probabilité, sachant qu'un noyau est présent à l'instant t, pour qu'il se désintègre dans l'intervalle $[t\,;\,t+s]$ ne dépend pas de son "âge" t.
En considérant un petit intervalle de temps dt, et en reprenant le type de raisonnement vu dans le chapitre "Fonction exponentielle", on peut justifier que la densité de probabilité doit être une fonction f telle que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = -\lambda f(t)$, c'est-à-dire une fonction f définie par $f(t) = k\,e^{-\lambda t}$
La constante strictement positive λ, appelée "constante de désintégration par unité de temps", dépend de la substance radioactive étudiée.
On peut remarquer que $\int_0^b k\,e^{-\lambda t}\,dt = \left[-\frac{k}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^b = -\frac{k}{\lambda}[e^{-\lambda b} + 1]$
On a $\lim\limits_{b\to+\infty} -\frac{k}{\lambda}[e^{-\lambda b} + 1] = -\frac{k}{\lambda}$. On choisira k que de façon que $\lim\limits_{b\to+\infty} -\frac{k}{\lambda}[e^{-\lambda b} + 1] = 1$
Ce qui signifie que pour un noyau donné, sa désintégration dans l'intervalle de temps $[0\,;\,+\infty[$ est l'événement certain. On a alors $k = -\lambda$
La probabilité pour qu'un noyau se désintègre dans l'intervalle de temps $[a\,;\,b]$ est alors :
$p([a\,;\,b]) = \int_a^b \lambda\,e^{-\lambda x}\,dx$
La densité de cette loi est la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \lambda\,e^{-\lambda x}$ où λ est une constante réelle strictement positive.

Exercice 09

On considère sur $[0\,;\,+\infty[$ la loi de probabilité de densité $\lambda\,e^{-\lambda x}$ avec $\lambda = 1{,}54 \times 10^{-10}$, constante de désintégration annuelle pour l'uranium 238.
Calculer $p([0\,;\,10])$; $p([0\,;\,10^{10}])$; $p([10^9\,;\,10^{10}])$
Déterminer t tel que $p([0\,;\,t]) = 0{,}99$. Interpréter ce résultat.

Exercice 10

On considère sur $[0\,;\,+\infty[$ la loi de probabilité de densité $\lambda\,e^{-\lambda x}$
Justifier que $p([t\,;\,+\infty[) = 1 - p([0\,;\,t])$. En déduire, en fonction de t, la valeur de $p([t\,;\,+\infty[)$.
Calculer la probabilité conditionnelle $p_{[t\,;\,+\infty[}([t\,;\,t+s])$. Vérifier que cette probabilité ne dépend pas de t.
Que retrouve-t-on ?