Etude de situations conduisant à des régionnements de la droite ou du plan à partir d'inéquations du premier degré

<u>Définition :</u>
Le demi-plan supérieur (resp. **inférieur**) **défini par la droite d'équation ax + by +c = 0** est l'ensemble des points de coordonnées (x ;y) telles que ax + by +c > 0 (resp. ax + by +c < 0) (on dit alors que **le demi-plan est ouvert**) ou ax + by +c ≥ (resp. ax + by +c ≤) (on dit alors que **le demi-plan est fermé**).

Par suite, toute droite du plan partage le plan en deux demi-plans : la droite est la frontière de ces deux demi-plans.
Le but est donc de résoudre des problèmes conduisant à la résolution d'une ou plusieurs inéquations par des considérations graphiques qui partageront le plan ou une droite en plusieurs régions.

Pour cela, on utilisera la méthode de résolution générale suivante (dans le plan) :

On souhaite résoudre l'inéquation ax + by + c ≥ (on peut toujours se ramener à une équation de ce type).

- On trace la droite D d'équation ax + by +c = 0.
- On déterminer le demi-plan défini par l'inéquation ax + by + c ≥ 0. Pour cela, on choisit un point $M_0(x_0 ;y_0)$ dans l'un des demi-plans définis par la droite D.
  Si $ax_0 + by_0 + c \geq 0$ alors M_0 appartient au demi-plan cherché et on hachure l'autre demi-plan.
  Si $ax_0 + by_0 + c \leq 0$ alors M_0 n'appartient pas au demi-plan cherché et on hachure le demi-plan contenant M_0.
- L'ensemble des solution est l'ensemble de coordonnées des points appartenant à la partie non hachurée du plan.

<u>Exemple :</u>

À l'approche des fêtes de Pâques, un artisan chocolatier décide de confectionner des oeufs en chocolat.

En allant inspecter ses réserves, il constate qu'il lui reste **18** kg de cacao, **8** kg de noisettes et **14** kg de lait.
Il a deux spécialités : l'oeuf *Extra* et l'oeuf *Sublime*.

Un oeuf *Extra* nécessite **1** kg de cacao, **1** kg de noisettes et **2** kg de lait.
Un oeuf *Sublime* nécessite **3** kg de cacao, **1** kg de noisettes et **1** kg de lait.

Il fera un profit de **20** fr. en vendant un oeuf *Extra*, et de **30** fr. en vendant un oeuf *Sublime*.

Combien d'oeufs *Extra* et *Sublime* doit-il fabriquer pour faire le plus grand bénéfice possible ?

Formulation du problème
Notons $x1$ le nombre d'oeufs *Extra* et $x2$ le nombre d'oeufs *Sublime* à produire. Le chocolatier cherche à **maximiser** la **fonction objectif** :

$$\max z = 20x1 + 30\,x2$$

Étant données les réserves du chocolatier, les **contraintes** suivantes devront être satisfaites :

$$x1 + 3x2 \leq 18$$
$$x1 + x2 \leq 8$$
$$2x1 + x2 \leq 14$$

Évidemment, on a encore les deux contraintes : $x1 \geq 0$ et $x2 \geq 0$.

Une inéquation définit un **demi-plan** où la condition est satisfaite.

Démarche

1. On dessine les demi-plans des contraintes. On trace la **droite frontière** et on indique par un petit triangle le demi-plan défini par l'inéquation (la droite frontière est obtenue en remplaçant ≤ par =).

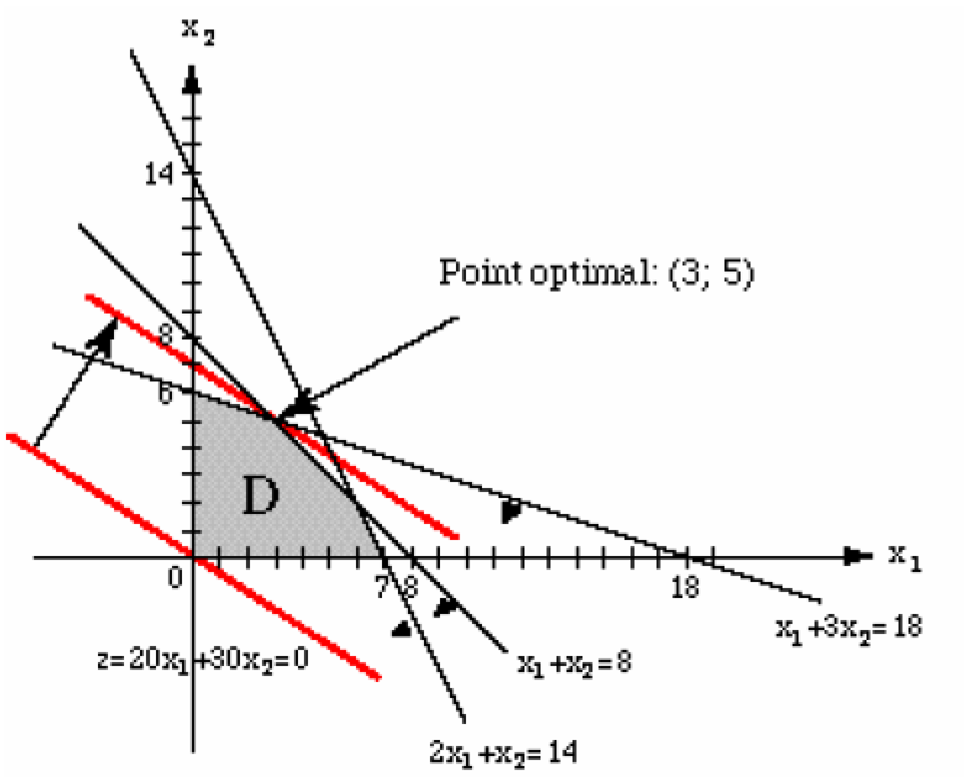
2. On détermine le domaine D définissant l'ensemble des points satisfaisant toutes les contraintes. Le domaine D est l'intersection de tous les demi-plans.

3. On trace la droite représentant la fonction objectif et passant par l'origine.

4. On translate la droite de la fonction objectif selon son vecteur normal, ici (20, 30).

5. Le point optimal est le dernier point du domaine D que la droite de la fonction objectif touchera lors de son déplacement.

Résolution graphique



Réponse au problème

Le point optimal est (3 ; 5), ce qui signifie que $x1=3$ et $x2=5$.
S'il veut maximiser son bénéfice, le chocolatier doit donc confectionner 3 oeufs *Extra* et 5 oeufs *Sublime*.
Son bénéfice sera de 20·3 + 30·5 = 210 fr. Il utilisera 18 kg de cacao, 8 kg de noisettes et 11 kg de lait.