

FONCTIONS POLYNOMES ET SECOND DEGRE

1) FONCTIONS POLYNÔMES

A) PROBLEMES DE NOTATION

Si l'on veut nommer n réels, choisir une lettre distincte pour désigner chacun d'entre eux, est très laborieux surtout si il y a plus de 26 réels. Heureusement, en mathématiques, on a une solution pour remédier à ce petit problème :

On choisit une seule lettre, a par exemple, et on désigne chacun de ces réels par cette lettre affectée d'un **indice**, par exemple a_1 (qui se lit « a indice 1 » ou « a 1 » pour les pressés)

Ces n réels sont désignés alors par :

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

Les pointillés représentent tous les réels a_i que l'on n'a pas écrits .

B) DEFINITION

On appelle **fonction polynôme** (**polynôme** pour simplifier) toute fonction définie sur \mathbb{R} , qui peut s'écrire sous la forme :

$$x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (\text{où } n \text{ est un entier naturel et } a_0, a_1, \dots, a_n \text{ sont } n+1 \text{ réels})$$

Rem :

- Le polynôme de la définition est ordonné suivant les puissances décroissantes de x .
- Un polynôme est toujours défini sur \mathbb{R} ; il n'est donc pas nécessaire de le répéter systématiquement .
- La fonction, définie sur \mathbb{R} , par $x \longmapsto 0$ est la **fonction polynôme nulle** .
- Les **fonctions constantes** ($x \longmapsto k$), Les **fonction affines** ($x \longmapsto ax + b$), les **fonctions puissances** ($x \longmapsto x^n$) sont des polynômes .

Ex :

- La fonction P , définie, sur \mathbb{R} par $P : x \longmapsto (x-1)(x-2)(x-3)$ est un polynôme. En effet, après développement, on a pour tout réel x , $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
- La fonction Q , définie sur \mathbb{R} , par $Q : x \longmapsto \frac{(x^2+1)(2x-1)}{x^2+1}$ est un polynôme. En effet, après simplification, on a pour tout réel x , $G(x) = 2x - 1$
- La fonction $h : x \longmapsto \frac{x^2-1}{x-1}$ n'est pas un polynôme car elle n'est pas définie sur \mathbb{R} .

C) UNICITE DE LA DEFINITION ET DEGRE D'UN POLYNOME (admis)

Soit P un polynôme non nul . Alors il existe un **unique** entier naturel n et des réels **uniques** $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ (avec $a_n \neq 0$), tels que, pour tout réel x :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

n est appelé le **degré** du polynôme P et on note $\deg(P) = n$. Les réels $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ sont appelés les **coefficients** du polynôme P . Plus précisément, a_k (avec $0 \leq k \leq n$) est le coefficient de x^k (ou du terme de degré k)

Ex :

- Toute fonction constante **non nulle** est un polynôme de degré 0
- Toute fonction affine $x \longmapsto ax + b$ (avec $a \neq 0$) est un polynôme de degré 1
- Toute fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) est un polynôme de degré 2 (ou trinôme de degré 2)
- Toute fonction $x \longmapsto a_n x^n$ (avec $a_n \neq 0$) est **un monôme** de degré n

Rem

- Le polynôme nul n'a pas de degré.
- Certains coefficients d'un polynôme non nul peuvent être nuls. Par exemple pour $x \longmapsto x^4 + 3x^3 + x$, les coefficients de termes de degré 0 et 2 sont nuls.

D) POLYNÔMES EGAUX (admis)

Deux polynômes non nuls sont égaux si, et seulement si, ils ont le **même degré** et si les **coefficients de leurs termes de même degré sont égaux**.

Ex :

Pour tout réel x , $ax^4 + bx^3 + cx^2 + ex + f = \frac{1}{2}x^4 + \sqrt{2}x^2 - 3x \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = 0, c = \sqrt{2}, e = -3$ et $f = 0$

2) TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

A) DEFINITION

On appelle **fonction polynôme du second degré (ou trinôme du second degré)** toute fonction définie sur \mathbb{R} , qui peut s'écrire sous la forme :

$$x \mapsto a x^2 + b x + c \quad (\text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels et } a \neq 0)$$

- On dit que a est le coefficient de x^2 , b le coefficient de x et c le terme constant.
- Un polynôme du second degré est toujours défini sur \mathbb{R} ; il n'est donc pas nécessaire de le répéter systématiquement.
- *Par abus de langage*, on utilise souvent l'expression trinôme du second degré $a x^2 + b x + c$ au lieu de trinôme du second degré $x \mapsto a x^2 + b x + c$

Ex :

- Les fonctions suivantes (définies sur \mathbb{R}) sont des trinômes du second degré :

$$x \mapsto 3x^2 + 2x + 3, \quad x \mapsto 4x^2 \text{ et } x \mapsto (x+1)^3 - (x-1)^3 \quad (\text{car pour tout réel } x, (x+1)^3 - (x-1)^3 = 6x^2 + 2)$$

- la fonction $x \mapsto (x+1)^2 - (x-1)^2$ n'est pas un trinôme du second degré car pour tout réel x , $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$

B) FORME CANONIQUE (retenir la méthode)

Soit $f : x \mapsto a x^2 + b x + c$ ($a \neq 0$) un trinôme du second degré.

Comme $a \neq 0$, pour tout réel x : $a x^2 + b x + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right)$

Or $x^2 + \frac{b}{a} x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2$

Cette écriture s'appelle **forme canonique** du trinôme f

Donc, pour tout réel x , $a x^2 + b x + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$

Rem : le réel $b^2 - 4ac$ se note Δ (*delta*) et s'appelle le **discriminant du trinôme**.

C) VARIATIONS ET REPRESENTATION GRAPHIQUE

a > 0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	

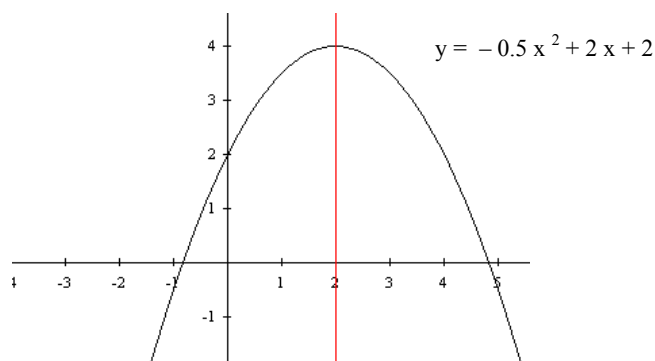
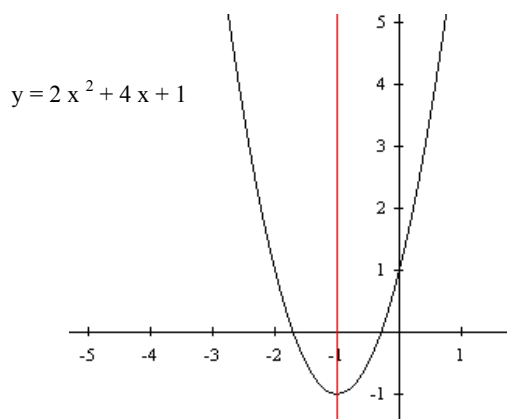
f admet un **minimum** en $-\frac{b}{2a}$

a < 0

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)		$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	

f admet un **maximum** en $-\frac{b}{2a}$

- La représentation graphique dans un repère orthogonal est une **parabole**, dont le sommet est $S\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- La droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de P .
- Si $a > 0$, les branches de la parabole sont tournées vers le haut.
- Si $a < 0$, les branches de la parabole sont tournées vers le bas.



Rem :

Comme nous l'avons vu, le trinôme du second degré $f : x \mapsto a x^2 + b x + c$ (avec $a \neq 0$), peut aussi s'exprimer sous la forme $f : x \mapsto a \left((x - \alpha)^2 + \beta \right)$. Ainsi f est une fonction associée à la fonction $x \mapsto x^2$.

La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto a x^2 + b x + c$, s'obtient à partir de la parabole P d'équation $y = x^2$ en effectuant une translation de vecteur $\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$, puis une dilatation, c'est à dire une "une multiplication par a "

3) EQUATION DU SECOND DEGRE ET FACTORISATION

A) DEFINITION

Une **équation du second degré à une inconnue x** est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad (\text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels et } a \neq 0)$$

Soit le trinôme du second degré $f : x \mapsto a x^2 + b x + c$ ($a \neq 0$)

L'équation $a x^2 + b x + c = 0$ s'écrit aussi $f(x) = 0$.

Résoudre cette équation dans \mathbb{R} , c'est trouver tous les réels u qui vérifient $f(u) = 0$. Ces solutions sont appelées **racines** du trinôme f .

B) RESOLUTION

$$a \neq 0, \text{ donc, pour tout réel } x, \quad a x^2 + b x + c = 0 \Leftrightarrow a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Trois cas se présentent :

Si $\Delta < 0$	$\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ et l'équation n'a donc pas de solution dans \mathbb{R} . (<i>un carré n'est jamais strictement négatif</i>)
Si $\Delta = 0$	$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$ L'équation a donc pour unique solution dans \mathbb{R} : $x_0 = -\frac{b}{2a}$
Si $\Delta > 0$	$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0$ L'équation a donc deux solutions distinctes dans \mathbb{R} : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Ex : Résoudre dans \mathbb{R} les équations ci-dessous :

$6x^2 - x - 1 = 0$ ($a = 6, b = -1, c = -1$)	$x^2 - 3x + 4 = 0$ ($a = 1, b = -3, c = 4$)	$2x^2 - 12x + 18 = 0$ ($a = 2, b = -12, c = 18$)
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 1 + 24 = 25$ $\Delta > 0$, donc l'équation $6x^2 - x - 1 = 0$ admet deux solutions dans \mathbb{R} : $x_1 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$ $S = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\}$	$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7$ $\Delta < 0$, donc l'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} . $S = \emptyset$	$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0$ $\Delta = 0$, donc l'équation $2x^2 - 12x + 18 = 0$ admet une solution dans \mathbb{R} : $x_0 = -\frac{-12}{2 \times 2} = 3$ $S = \{ 3 \}$

Rem :

- Il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant. (ex : $4x^2 - 9 = 0$, $5x^2 - 4x = 0$, ...)
- Lorsque **a et c sont de signes contraires** $-4ac > 0$ donc $\Delta > 0$ et l'équation $a x^2 + b x + c = 0$ admet deux solutions distinctes.
- Lorsque l'équation $a x^2 + b x + c = 0$ admet deux racines x_1 et x_2 , alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Application :

- Vérifier le calcul des solutions de l'équation $a x^2 + b x + c = 0$.
- Trouver une racine connaissant l'autre. (ex : 1 est une solution évidente de $2x^2 - 5x + 3 = 0$, donc l'autre racine est $\frac{c}{a} = \frac{3}{2}$)
- Déterminer le signe des racines sans en connaître les valeurs.

C) FACTORISATION DU TRINOME $a x^2 + b x + c$

On a vu que, pour tout réel x : $a x^2 + b x + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$

Trois cas se présentent :

$\Delta < 0$	Le trinôme n'a pas de racine ; il est inutile d'espérer factoriser ce trinôme en produit de polynômes du premier degré.
$\Delta = 0$	$a x^2 + b x + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = a \left(x + \frac{b}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} \right)$ ($-\frac{b}{2a}$ est appelée racine double du trinôme)
$\Delta > 0$	$a x^2 + b x + c = a (x - x_1) (x - x_2)$ (où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme)

4) SIGNE DU TRINOME $ax^2 + bx + c$

Etudions le signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

- Si $\Delta > 0$

Soit x_1 et x_2 les racines du trinôme (avec, par exemple $x_1 < x_2$)

On a donc :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	-	-	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	-	+

Pour résumer : “ $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre les racines ”

- Si $\Delta \leq 0$, on utilise la forme canonique : $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$

- Si $\Delta < 0$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif et donc, pour tout réel x , $ax^2 + bx + c$ est du signe de a .

- Si $\Delta = 0$, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et donc, pour tout réel $x \neq -\frac{b}{2a}$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a (pour $x = -\frac{b}{2a}$, $f(x) = 0$)

Ex : Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $f(x) < 0$ avec $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = 49 (> 0)$; les solutions de l'équation $2x^2 + 5x - 3 = 0$ sont donc $x_1 = -3$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

Or $f(x)$ est du signe de $a = 2$ sauf entre les racines. Ainsi l'ensemble des solutions est $S =]-3; \frac{1}{2}[$

5) RECAPITULATIF ET LIENS AVEC LES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Racines de f	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	Pas de racine
Factorisation	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$f(x) = a(x - x_0)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	Pas de factorisation

$a > 0$			
Signe de f(x)	+ 0 - 0 +	+ 0 +	+

$a < 0$			
Signe de f(x)	- 0 + 0 -	- 0 -	-