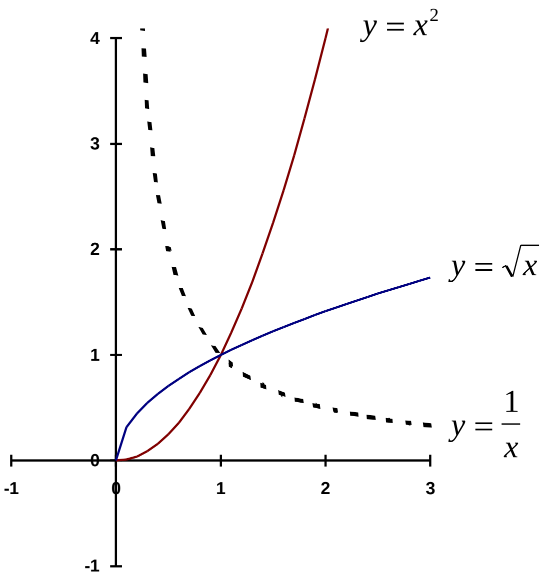
FONCTIONS USUELLES

I. Donner les propriétés et la représentation graphique des fonctions usuelles

- **Exemple :** Donner, sur l'intervalle $[0;3]$ le sens de variation et la représentation graphique des fonctions : $x \mapsto x^2$ $x \mapsto \frac{1}{x}$ $x \mapsto \sqrt{x}$
- **Solution :**
Il s'agit d'utiliser les résultats du cours

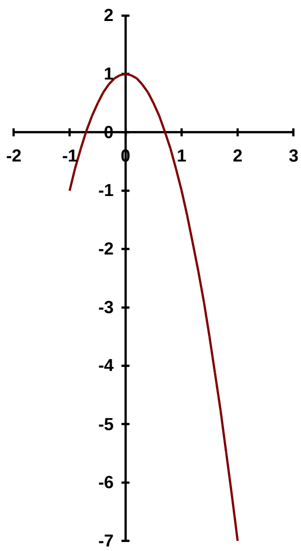
x	0		3
x^2	0	↗	9
$\frac{1}{x}$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{3}$
$\sqrt{x}$	0	↗	$\sqrt{3}$



II. Établir le tableau de variation d'une fonction du second degré à partir de la fonction $f(x) = x^2$:

- **Exemple :** soit la fonction $f : x \mapsto -2x^2 + 1$ pour $x \in [-1;2]$. Tableau de variations et graphe.
- **Solution :** on a la succession de tableaux suivante :

x	-1		0		2
x^2	1	↘	0	↗	4
$-2x^2$	-2	↗	0	↘	-8
$-2x^2 + 1$	-1	↗	1	↘	-7



III. Étudier les limites en $\pm\infty$ d'une fonction du second degré :

- **Exemple :** étudier les limites en $\pm\infty$ de $f(x)=3x^2-2x+5$ et $g(x)=-5x^2+3x-1$
- **Solution :** $f(x)=x^2\left(3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)$

$x\to\pm\infty \Rightarrow \left(3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)\to(3-0+0)=3$

$x\to\pm\infty \Rightarrow x^2 \to+\infty$

Donc $x\to\pm\infty \Rightarrow f(x)\to 3x^2 \to+\infty$

Ainsi les branches de la parabole sont tournées vers le haut. On remarque que $a=3>0$.

$g(x)=x^2\left(-5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$x\to\pm\infty \Rightarrow \left(-5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)\to(-5+0-0)=-5$

Donc $x\to\pm\infty \Rightarrow g(x)\to-5x^2 \to-\infty$

Ainsi les branches de la parabole sont tournées vers le bas. On remarque que $a=-5>0$.

IV. Déterminer le sommet d'une parabole :

- **Exemple :** déterminer le minimum de la fonction $f(x)=3x^2-6x+9$
- **Solution :**

On met *f* sous la forme canonique $f(x)=3(x^2-2x+3)$

Début d'un carré $f(x)=3(x^2-2x+1-1+3)=3(x^2-2x+1+2)$

$f(x)=3\left[(x-1)^2+2\right]$ qui est minimum pour $(x-1)^2=0$

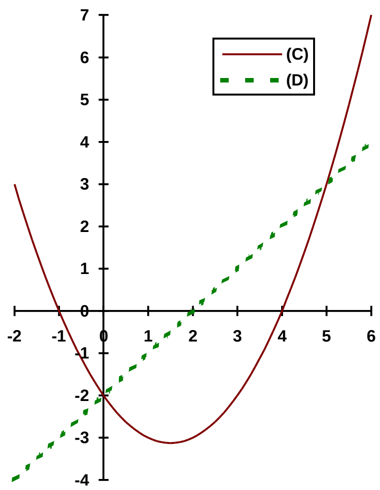
On a donc le minimum pour $x=1$. Dans ce cas $y=f(1)=6$. D'où le sommet : $S=(1;6)$.

V. Résoudre graphiquement équations ou inéquations :

- **Exemple :** $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}x-2$ et $g(x)=x-2$ sont représentées ici par la courbe (*C*) et la droite (*D*).

Résoudre graphiquement :

$\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}x-2<0$ et $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}x-2<x-2$



- **Solution :**

Pour $x\in\left]-1;4\right[$ la courbe est au-dessous de l'axe *Ox*.

Donc $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}x-2<0 \Leftrightarrow x\in\left]-1;4\right[$

L'inéquation $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}x-2<x-2$ s'écrit encore $f(x)<g(x)$

Les points d'intersection de (*C*) et (*D*) sont $(0;-2)$ et $(5;3)$.

Pour $x\in\left]0;5\right[$ la courbe (*C*) est au-dessous de la droite (*D*).

Donc $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3}{2}x-2<x-2 \Leftrightarrow x\in\left]0;5\right[$.