FONCTIONS CIRCULAIRES

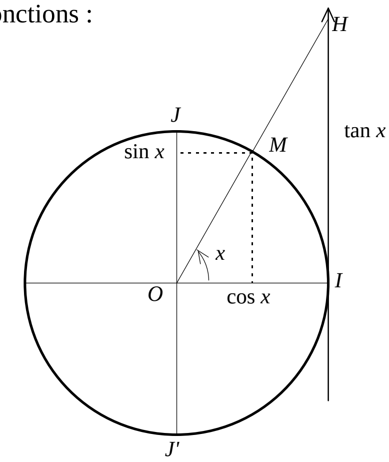
Sont appelées fonctions circulaires les fonctions liées au cercle trigonométrique, à savoir notamment les fonctions sinus, cosinus et tangente.

Rappelons comment sont définies ces trois fonctions :

Si H est l'intersection de la tangente au cercle en I avec la droite orientée (OM) alors $\tan x = \overline{IH}$.

Cette définition prolonge celle déjà connue dans le triangle rectangle. En effet, lorsque x est une mesure d'un angle aigu, on a dans le triangle OIH rectangle en I :

$$\tan x = \frac{IH}{OI} = \frac{IH}{1} = IH$$



<u>RAPPELS</u>

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$

$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

$\cos(-x) = \cos x$

(la fonction cosinus est paire)

$\sin(-x) = -\sin x$

(la fonction sinus est impaire)

<u>Exercice</u> : par un raisonnement géométrique, démontrer que : $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ pour tout $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}[$.

I) Fonction périodique

<u>Définition</u> : Soit f une fonction définie sur un domaine D_f et T un nombre réel **non nul**. On dit que f est périodique de période T (ou T–périodique) si :

pour tout réel $x \in D_f$, $x + T \in D_f$ et <u>$f(x + T) = f(x)$</u>

<u>Exemples</u> : les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions 2π–périodiques définies sur $\mathbb{R}$. Cela se traduit par les relations : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ pour tout réel x.

<u>Intérêt</u> : dès qu'une fonction T–périodique est connue sur un intervalle de longueur T, alors elle est connue sur tout son ensemble de définition. Il suffit de compléter la courbe par translation de vecteur $k\,T\,\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Pour étudier (ou tracer) une fonction périodique, on se limite donc à une période.

Notons que si T est une période, tout multiple de T en est une autre :

$$\ldots = f(x + 2T) = f(x + T) = f(x) = f(x - T) = f(x - 2T) = \ldots$$

<u>Application</u> : calculer $\cos(73\pi)$. Puisque 2π est une période de la fonction cosinus, $36\times2\pi = 72\pi$ en est une également, on a donc $\cos(73\pi) = \cos(\pi + 72\pi) = \cos(\pi) = -1$.

<u>Méthode pour trouver la période d'une fonction trigonométrique</u> : $f(x) = \cos 3x$; $T = ?$

La relation $f(x + T) = f(x)$ se traduit par :

$\cos(3(x + T)) = \cos(3x + 3T) = \cos 3x$, donc $3T = 2\pi$, $T = \frac{2\pi}{3}$.

Généralisons :

la période de la fonction définie par $f(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ est $T = \frac{2\pi}{\omega}$

la période de la fonction définie par $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ est $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Démonstration : $f(t + \frac{2\pi}{\omega}) = \cos(\omega(t + \frac{2\pi}{\omega}) + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi + 2\pi) = \cos(\omega t + \varphi) = f(t)$.
Démonstration analogue pour la fonction sinus.

II) Étude des fonctions sinus, cosinus et tangente

Nous le savons déjà, les fonctions sinus et cosinus sont 2π–périodiques, définies sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc nous contenter de les étudier sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[0 ; 2\pi[$ ou $]-\pi ; \pi]$. Mais nous savons, de plus, que la fonction cosinus est paire ($\cos(-x) = \cos x$) et que la fonction sinus est impaire ($\sin(-x) = -\sin x$). Leurs représentations graphiques admettent donc des symétries. C'est pourquoi nous étudierons ces fonctions sur $[0 ; \pi[$.

Nous rappelons les résultats fondamentaux suivants :

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction cosinus

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction − sinus

De manière plus générale,

la dérivée de $\sin(ax + b)$ est $a \cos(ax + b)$

la dérivée de $\cos(ax + b)$ est $- a \sin(ax + b)$.

Exemple de démonstration : pour la fonction sinus ; $f(x) = \sin x$

Le taux d'accroissement de f en x s'écrit :

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h - \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} - \frac{\sin h}{h} \cos x$$

Or, on démontre que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$. D'où $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x$.

Ces résultats nous permettent de trouver les variations des fonctions sinus et cosinus :

FONCTION SINUS

Posons $f(x) = \sin x$. On a donc $f'(x) = \cos x$

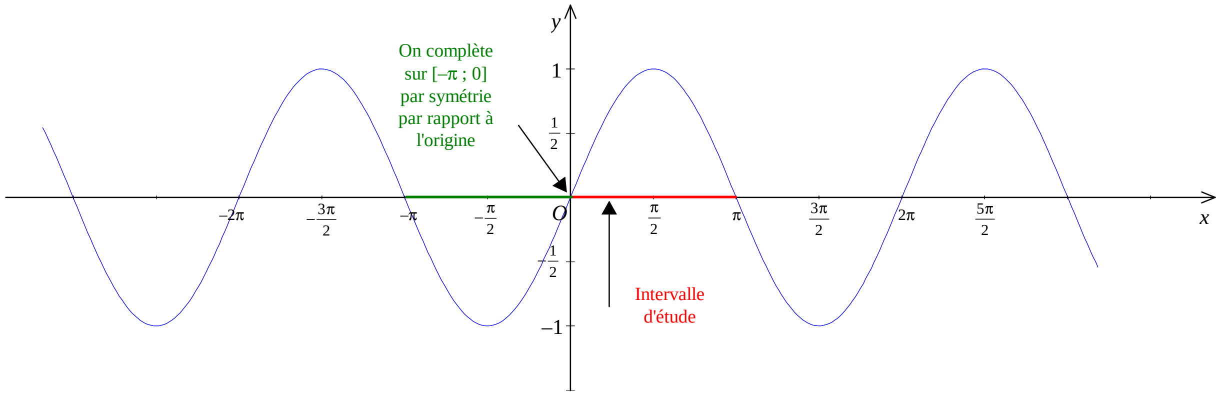
Sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = \cos x > 0$, donc la fonction sinus est strictement croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.

Sur $]\frac{\pi}{2} ; \pi]$, $f'(x) = \cos x < 0$ donc la fonction sinus est strictement décroissante sur $]\frac{\pi}{2} ; \pi]$.

D'où le tableau de variations de la fonction sinus :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x) = \cos x$	1	$+$	0	$-$	-1
Variations de sin	0	↗	1	↘	0

On en déduit la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \sin x$ sur $[0 ; \pi[$ que l'on complétera sur $[-\pi ; \pi]$ par symétrie par rapport à l'origine puis sur $\mathbb{R}$, par translation de vecteur $2 k \pi \vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$).



FONCTION COSINUS

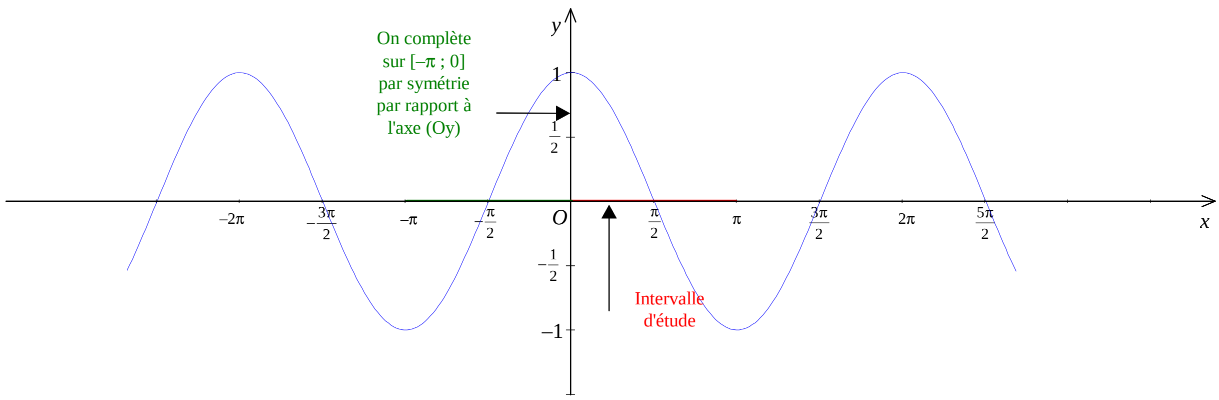
Posons $f(x) = \cos x$. On a donc $f'(x) = -\sin x$

Sur $[0 ; \pi[$, $f'(x) = -\sin x < 0$, donc la fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0 ; \pi[$.

D'où le tableau de variations de la fonction cosinus :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x) = -\sin x$	0	$-$	-1	$-$	0
variations de cos	1	↘	0	↘	-1

On en déduit la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \cos x$ sur $[0 ; \pi[$ que l'on complétera sur $[-\pi ; \pi]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis sur $\mathbb{R}$, par translation de vecteur $2k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.



FONCTION TANGENTE

Posons $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ car cos x s'annule pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Parité : La fonction tangente est impaire. En effet, D_f est symétrique par rapport à 0, et de plus :

$$\text{pour tout } x \in D_f, \text{ on a : } \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

Périodicité : la fonction tangente est π–périodique. En effet :

$$\text{pour tout } x \in D_f, \text{ on a } \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

La fonction tangente étant π–périodique et impaire, nous pouvons restreindre son étude à l'intervalle $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.

<u>Limites au bornes de l'intervalle d'étude</u> :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \text{ car } \lim_{x\to 0^+} \sin x = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty \text{ car } \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1 \text{ et } \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0 \text{ avec } \cos x > 0.$$

La fonction tangente admet donc une asymptote verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

<u>Dérivée</u> : la fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$, sa dérivée f' sera donc égale à $\frac{u'v - uv'}{v^2}$, ce qui donne :

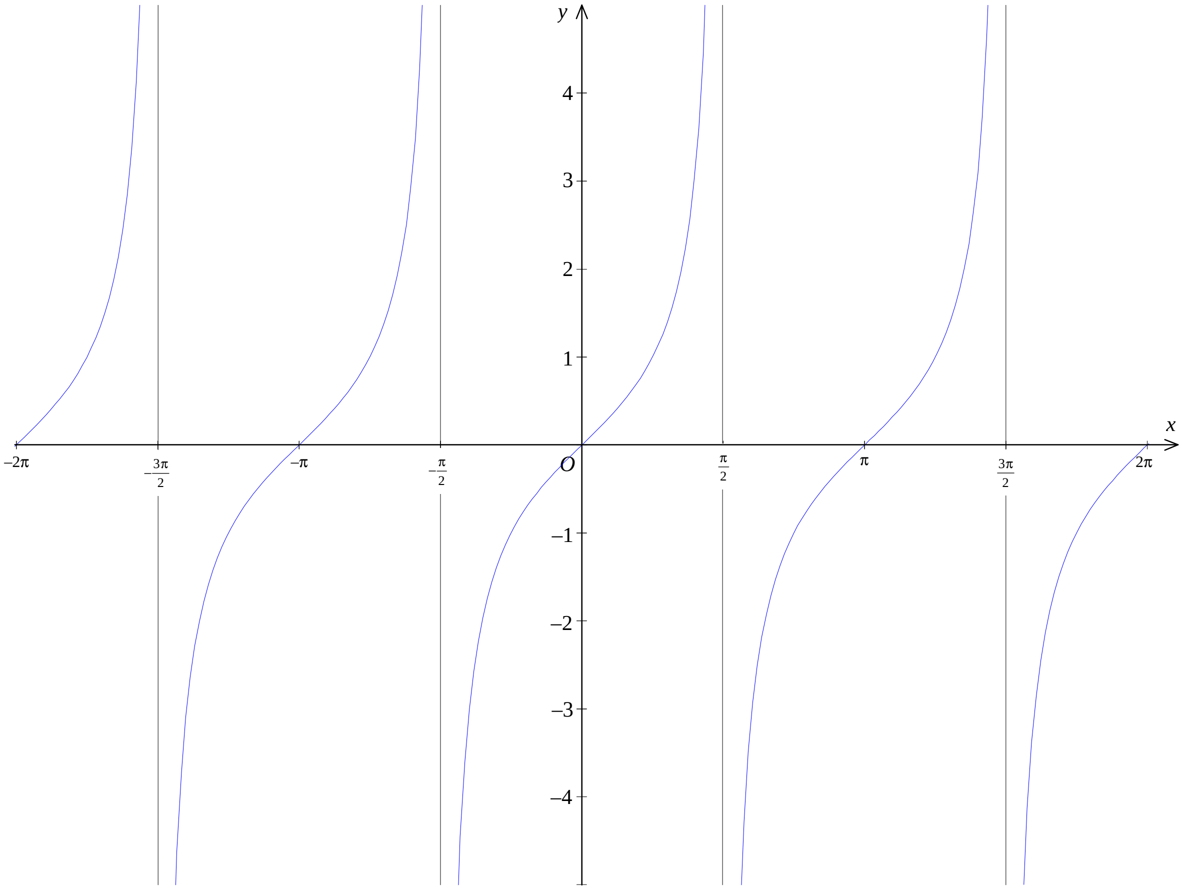
$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

<u>Sens de variation</u> : puisque $\frac{1}{\cos^2 x}$ est strictement positif pour tout réel x de $[0 ; \frac{\pi}{2}[$, on en déduit que la fonction tangente est strictement croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$.

<u>Tableau de variations</u> :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
signe de $f'(x)$	$+$
variations de tan	0 $\nearrow$ $+\infty$

D'où la représentation graphique de la fonction tangente sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ que l'on complétera sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$ par symétrie par rapport à l'origine puis sur D_f, par translation de vecteur $k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.



<u>Exemple</u> : étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t + \sin t$.

Parité : f est impaire. On peut restreindre l'intervalle d'étude à $[0\ ;+\pi[$.

Périodicité : aucune. Cependant : $f(t + 2\pi) = 2\pi + f(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On peut donc étudier la fonction sur $[0\ ;\ \pi[$. On complétera la courbe, d'une part, par symétrie par rapport à l'origine O du repère (f impaire) puis à l'aide de translations de vecteurs $2k\pi(\vec{i} + \vec{j})$.

Comme, $t - 1 \leqslant f(t) \leqslant t + 1$, on en déduit $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -\infty$.

Dérivée : $f'(t) = 1 + \cos t \geqslant 0$ et $f'(t) = 0 \iff \cos t = -1 \iff t = \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Tableau de variations :

<table>
<tr><td>t</td><td>0</td><td></td><td>π</td></tr>
<tr><td>Signe de la dérivée f'</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Variations de la fonction f</td><td>0</td><td>↗</td><td>π</td></tr>
</table>