

# Développements – Factorisations

## I Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et relations qui en découle

En cinquième vous avez appris que la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$K \times (c + d) = K \times c + K \times d$$

Puis en quatrième, vous avez découvert la relation suivante :

$$(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Démonstration : on utilise la relation vue en cinquième en remplaçant K par a + b  
 $(a + b) \times (c + d) = (a + b) \times c + (a + b) \times d = ac + bc + ad + bd$

Cette année voici trois nouvelles relations, appelés **identités remarquables** :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Démonstration : on va utiliser la relation vue en quatrième,  
 $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$   
 $(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$   
 $(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$

**Remarque** : Toutes les relations en gras doivent être apprises par cœur.

## II Factorisation – Développement

**Développer un produit, c'est le transformer en une somme algébrique.**

**Factoriser une somme algébrique, c'est la transformer en un produit**

## DEVELOPPEMENT



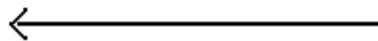
$$K \times (c + d) = K \times c + K \times d$$

$$(a + b) \times (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$



## FACTORISATION

### III Exemples

Pour vérifier que vous avez bien compris ce cours, essayez de faire les exemples suivants :

#### a) Développement

$$A = (b + 2)(b - 3) = b^2 - 3b + 2b - 6 = \boxed{b^2 - b - 6}$$

$$B = (b - 5)(-5 - b) = -5b - b^2 + 25 + 5b = \boxed{25 - b^2}$$

$$C = 5(3 - d) + (7 - d) \times 3 = 15 - 5d + 21 - 3d = \boxed{36 - 8d}$$

$$D = (q - 4)(q - 3) - 5(q + 3) = q^2 - 3q - q + 12 - (5q + 15) = q^2 - 4q + 12 - 5q - 15 = \boxed{q^2 - 9q - 3}$$

$$E = (d - 3)^2 = \boxed{d^2 - 6d + 9}$$

$$F = (h - 5)^2 - (h - 8)^2 = h^2 - 10h + 25 - (h^2 - 16h + 64) = h^2 - 10h + 25 - h^2 + 16h - 64$$

$$F = \boxed{6h - 39}$$

$$G = (a - 2)(2a - 4)(1 - a) = (2a^2 - 4a - 4a + 8)(1 - a) = (2a^2 - 8a + 8)(1 - a)$$

$$G = 2a^2 - 2a^3 - 8a + 8a^2 + 8 - 8a = \boxed{-2a^3 + 10a^2 - 16a + 8}$$

$$H = (h + 3)^3 = (h + 3)2(h + 3) = (h^2 + 6h + 9)(h + 3)$$

$$H = h^3 + 3h^2 + 6h^2 + 18h + 9h + 27$$

$$H = \boxed{h^3 + 9h^2 + 27h + 27}$$

## b) La factorisation de A à Z

Comment comprendre les exemples ci-dessous ?

On a volontairement mis des lettres majuscules dans les titres afin que vous compreniez que vous pouvez mettre n'importe quelle expression algébrique à la place d'une lettre majuscule.

Exemple :

$$KA + KB = K ( A + B )$$

on peut prendre  $K = 2h + 3$  ;  $A = h^2 + 1$  et  $B = 6$

$$\text{on a donc } (2h + 3)(h^2 + 1) + (2h + 3) \times 6 = (2h + 3) [(h^2 + 1) + 6] = (2h + 3)(h^2 + 7)$$

### ♦ $KA + KB = K ( A + B )$

$$A = (h + 3)(2h + 4) + (h + 8)(h + 3)$$

$$A = (h + 3)[(2h + 4) + (h + 8)]$$

$$A = (h + 3)(3h + 12)$$

Attention : la factorisation n'est pas entièrement terminée

$$\boxed{A = 3(h + 4)(h + 3)}$$

$$B = (2h - 5)(h - 1) - (2h - 5)(2h - 3)$$

$$B = (2h - 5)[(h - 1) - (2h - 3)]$$

Attention : il y a un signe - devant les ( )

$$B = (2h - 5)[h - 1 - 2h + 3]$$

$$\boxed{B = (2h - 5)[-h + 2]}$$

$$C = (h + 1)(h + 2) + (h + 1)(2h - 1) - (h + 1)h$$

$$C = (h + 1)[(h + 2) + (2h - 1) - h]$$

$$C = (h + 1)[h + 2 + 2h - 1 - h]$$

$$\boxed{C = (h + 1)[2h - 1]}$$

$$D = (h + 4)(2h - 2)(3h - 1) + (h + 4)(2h - 2)(5h - 3)$$

$$D = (h + 4)(2h - 2)[(3h - 1) + (5h - 3)]$$

$$D = (h + 4)(2h - 2)[8h - 4]$$

$$\boxed{D = 4(h + 4)(2h - 2)(2h - 1)}$$

### ♦ $KA + K = KA + K \times 1 = K ( A + 1 )$

$$E = (h - 5)(2h - 4) + (h - 5)$$

$$E = (h - 5)[(2h - 4) + 1]$$

$$\boxed{E = (h - 5)(2h - 3)}$$

$$F = (2h - 1)(3h - 4) - (3h - 4)$$

$$F = (3h - 4)[(2h - 1) - 1]$$

$$F = (3h - 4)(2h - 2)$$

$$F = 2(3h - 4)(h - 1)$$

$$G = (2h - 1)(h + 1) + h + 1$$

$$G = (2h - 1)(h + 1) + (h + 1)$$

$$G = (h + 1)[(2h - 1) + 1]$$

$$G = 2h(h + 1)$$

$$H = (-h + 4)(2h - 4) - h + 4$$

$$H = (-h + 4)(2h - 4) + (-h + 4)$$

$$H = (-h + 4)[(2h - 4) + 1]$$

$$H = (-h + 4)(2h - 3)$$

◆  $K^2 + KA = K \times K + KA = K(K + A)$

$$I = (2h - 5)^2 - (2h - 5)(2h + 2)$$

$$I = (2h - 5)(2h - 5) - (2h - 5)(2h + 2)$$

$$I = (2h - 5)(2h - 5 - 2h - 2)$$

$$I = -7(2h - 5)$$

$$J = (h - 4)^2 + h - 4$$

$$J = (h - 4)(h - 4) + (h - 4)$$

$$J = (h - 4)[(h - 4) + 1]$$

$$J = (h - 4)(h - 3)$$

◆  $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$  et  $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$

$$K = 4h^2 + 12h + 9$$

$$K = (2h)^2 + 12h + 3^2$$

$$K = (2h + 3)^2$$

Attention : il faut vérifier que l'on a bien  $2 \times 2h \times 3 = 12h$

$$L = -18h + 1 + 81h^2$$

$$L = 81h^2 - 18h + 1$$

Attention : remettez les termes dans l'ordre habituel pour éviter toute erreur d'étourderie

$$L = (9h)^2 - 18h + 1^2$$

$$L = (9h - 1)^2$$

Attention : il faut vérifier que l'on a bien  $2 \times 9h \times 1 = 18h$

$$\blacklozenge A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$M = h^2 - 4$$

$$M = h^2 - 2^2$$

$$M = (h - 2)(h + 2)$$

$$N = -36h^2 + 9$$

$$N = 9 - 36h^2$$

Attention : pensez à remettre les termes dans l'ordre habituel pour éviter toute erreur

$$N = 3^2 - (6h)^2$$

$$N = (3 - 6h)(3 + 6h)$$

$$N = 3(1 - 2h)3(1 + 2h)$$

Attention : prenez bien votre temps lorsqu'il y a plusieurs factorisation par des entiers

$$\boxed{N = 9(1 - 2h)(1 + 2h)}$$

$$O = (2h - 1)^2 - 81$$

$$O = (2h - 1)^2 - 9^2$$

On peut éventuellement sauter cette ligne si l'on se sent à l'aise

$$O = [(2h - 1) - 9][(2h - 1) + 9]$$

$$O = (2h - 10)(2h + 8)$$

$$\boxed{O = 4(h - 5)(h + 4)}$$

$$P = (3h - 2)^2 - (h + 1)^2$$

$$P = [(3h - 2) - (h + 1)][(3h - 2) + (h + 1)]$$

$$\boxed{P = (2h - 3)(4h - 1)}$$

$$Q = 9(h - 1)^2 - 16$$

$$Q = [3(h - 1)]^2 - 4^2$$

$$Q = [3(h - 1) - 4][3(h - 1) + 4]$$

$$Q = (3h - 3 - 4)(3h - 3 + 4)$$

$$\boxed{Q = (3h - 7)(3h + 1)}$$

$$R = 9(2h + 1)^2 - 16(-h + 2)^2$$

$$R = [3(2h + 1)]^2 - [4(-h + 2)]^2$$

$$R = [3(2h + 1) - 4(-h + 2)][3(2h + 1) + 4(-h + 2)]$$

$$R = [6h + 3 - (-4h + 8)](6h + 3 - 4h + 8)$$

$$R = (6h + 3 + 4h - 8)(2h + 11)$$

$$R = (10h - 5)(2h + 11)$$

$$\boxed{R = 5(2h - 1)(2h + 11)}$$

### ◆ quelques factorisations cachées

$$S = (h + 4)(2h - 3) + (h - 2)(4h - 6)$$

$$S = (h + 4)(2h - 3) + (h - 2)2(2h - 3)$$

$$S = (2h - 3)[(h + 4) + 2(h - 2)]$$

$$S = (2h - 3)(h + 4 + 2h - 4)$$

$$\boxed{S = 3h(2h - 3)}$$

$$T = (2h + 1)(-5h + 3) + 5h - 3$$

$$T = (2h + 1)(-5h + 3) - (-5h + 3)$$

$$T = (-5h + 3)[(2h + 1) - 1]$$

$$\boxed{T = 2h(-5h + 3)}$$

$$U = 8 - 24h + 18h^2$$

$$U = 2(4 - 12h + 9h^2)$$

$$\boxed{U = 2(2 - 3h)^2}$$

$$V = -h^2 - 2h - 1$$

$$V = -(h^2 + 2h + 1)$$

$$\boxed{V = -(h + 1)^2}$$

$$W = (2h + 2)^2 - (h + 3)(h + 1)$$

$$W = [2(h + 1)]^2 - (h + 3)(h + 1)$$

$$W = 4(h + 1)^2 - (h + 3)(h + 1)$$

$$W = (h + 1)[4(h + 1) - (h + 3)]$$

$$W = (h + 1)(4h + 4 - h - 3)$$

$$\boxed{W = (h + 1)(3h + 1)}$$

### ◆ pour les pros : factorisation en deux temps et pas trois mouvements

$$X = (h + 1)(h + 2) + h^2 + 2h + 1$$

$$X = (h + 1)(h + 2) + (h + 1)^2$$

$$X = (h + 1)[h + 2 + h + 1]$$

$$X = (h + 1)(2h + 3)$$

Y a plus rien à savoir faire !

Zzzzzz : vous avez bien mérité un petit repos si vous êtes arrivé sans encombre jusqu'ici ...