<u>Document élève</u>

<u>DERIVATION</u>

<u>Objectifs :</u> -introduire la notion de nombre dérivé et de fonction dérivée.
-tracer une tangente à partir du nombre dérivé.
-calculer des fonctions dérivées.

<u>Prérequis :</u> -construction de la tangente à une courbe.
-coefficient directeur d'une droite (détermination graphique).

<u>Matériel :</u> -rétroprojecteur.
-cours photocopié.

<u>Déroulement de la séance (2 heures)</u>

*5 minutes
→Introduction : pour résoudre des problèmes d'origines divers (électricité, construction, imprimerie...) on est amené à utiliser les fonctions. La dérivation va permettre d'étudier ces fonctions de façon plus précise.
→Distribuer la page du cours et la courbe.

*35 – 40 minutes : I Nombre dérivé (1a, 1b, 1c, 1d)
→les élèves travaillent en autonomie.
→possibilité d'un rappel pour le a (lecture graphique pour le coefficient directeur) ; envoyer un élève au tableau pour expliquer sur un transparent (une droite étant tracé dans un repère).
→compléter le transparent.

*5 minutes
→la définition est complétée par le professeur,
→l'application est faite par les élèves

*5 minutes : Fonction dérivée (feuille 2)
La définition est donnée directement sur la feuille.

*15 – 20 minutes : travail sur l'activité → professeur-élèves

*10 minutes : III- L'essentiel

*15 minutes : exercices d'application.

DERIVATION

Nombre dérivé et fonction dérivée

I - Nombre dérivé .

1-Activité

Soit *(C)* la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [-3 ;3] par:

$$f(x) = x^3$$

La courbe *(C)* est représentée dans le plan rapporté au repère orthogonal figurant sur l'annexe.

a)Le point M 1 de la courbe *(C)* a pour abscisse 2.
La droite T_1 est la tangente à la courbe *(C)* au point M 1 .
Déterminer graphiquement le coefficient directeur de (T 1).
Reporter votre résultat dans le tableau ci-dessous.

b) La droite T_2 est la tangente à *(C)* au point M 2.
Procéder de la même façon qu'au a) pour le point M 2 de (C) d'abscisse (-2).

c) Placer sur la courbe *(C)* le point M 3 d'abscisse (+1).
Tracer la tangente T_3 à *(C)* au point M 3.
Déterminer graphiquement le coefficient directeur de T_3, en arrondissant la valeur à l'unité.
Reporter votre résultat arrondi à l'unité dans le tableau ci-dessous.

d) Procéder de la même manière pour les points M 4 et M 5 d'abscisses respectives (-1) et (0).

Points	M 1	M 2	M 3	M 4	M 5
Abscisse x du point					
Coefficient directeur					

2- Définition

On définit le **nombre dérivé** de la fonction *f* en a … :

……..

Application :

Le nombre dérivé de 2, noté… f ' (2) est … : ……………………………….

Compléter : f ' (0) =…………

f ' (-1)=………….

I I –Fonction dérivée

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
On appelle fonction dérivée de f, notée *f '*, qui à tout nombre réel *x* associe son nombre dérivé *f ' (x)*.

Dans le même repère que la courbe (C), placer les points Ai

-d'abscisse x

-d'ordonnée : la valeur du coefficient directeur (f ' (x)) : …….

Par exemple, placer le point A1 : (2 ; f ' (2) =……….)

Tracer ensuite la courbe passant par ces points.

Quel est le nom de cette courbe ? :

Quelle est l'équation générale de cette courbe ? : ……….

A l'aide des valeurs du tableau de l'activité 1 du paragraphe I, déterminez la valeur du coefficient inconnu.

x				
f ' (x)				
a= f ' (x) / (x ²)				

donc f ' (x) = …………

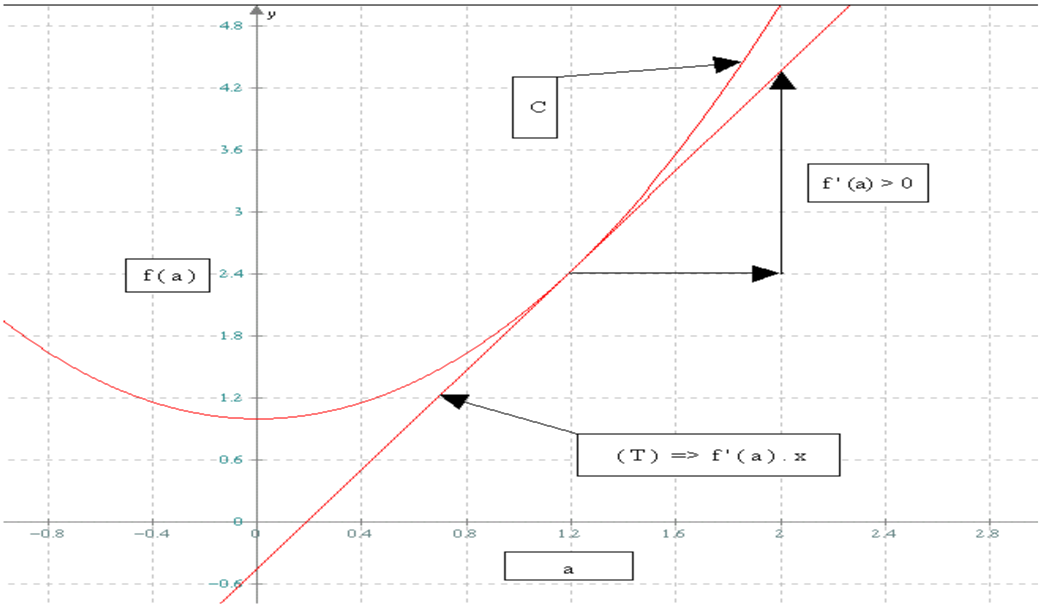
La fonction f ' définie par f ' (x) =……………

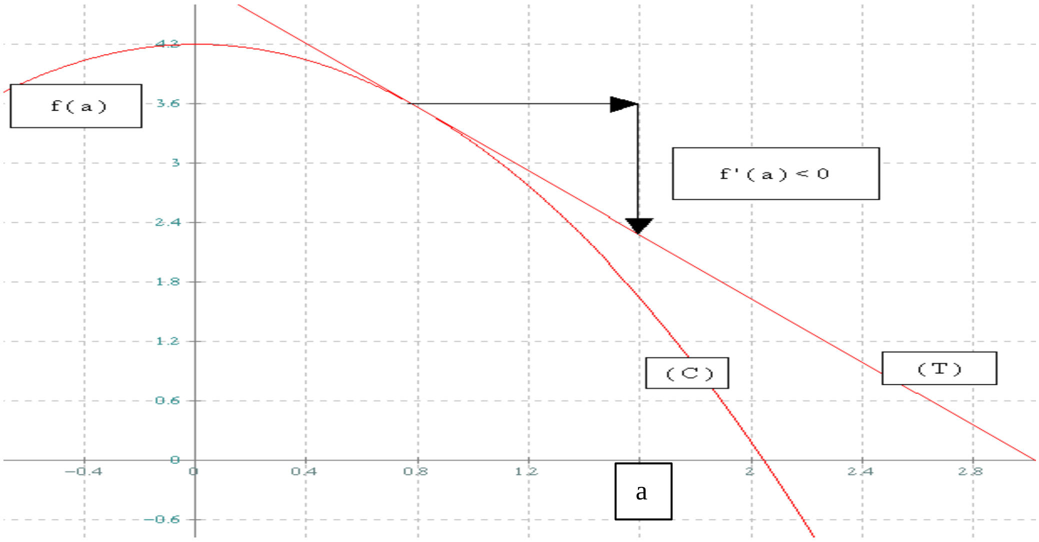
est la fonction dérivée de la fonction f définie par f (x) = x^3…….

III – L'ESSENTIEL

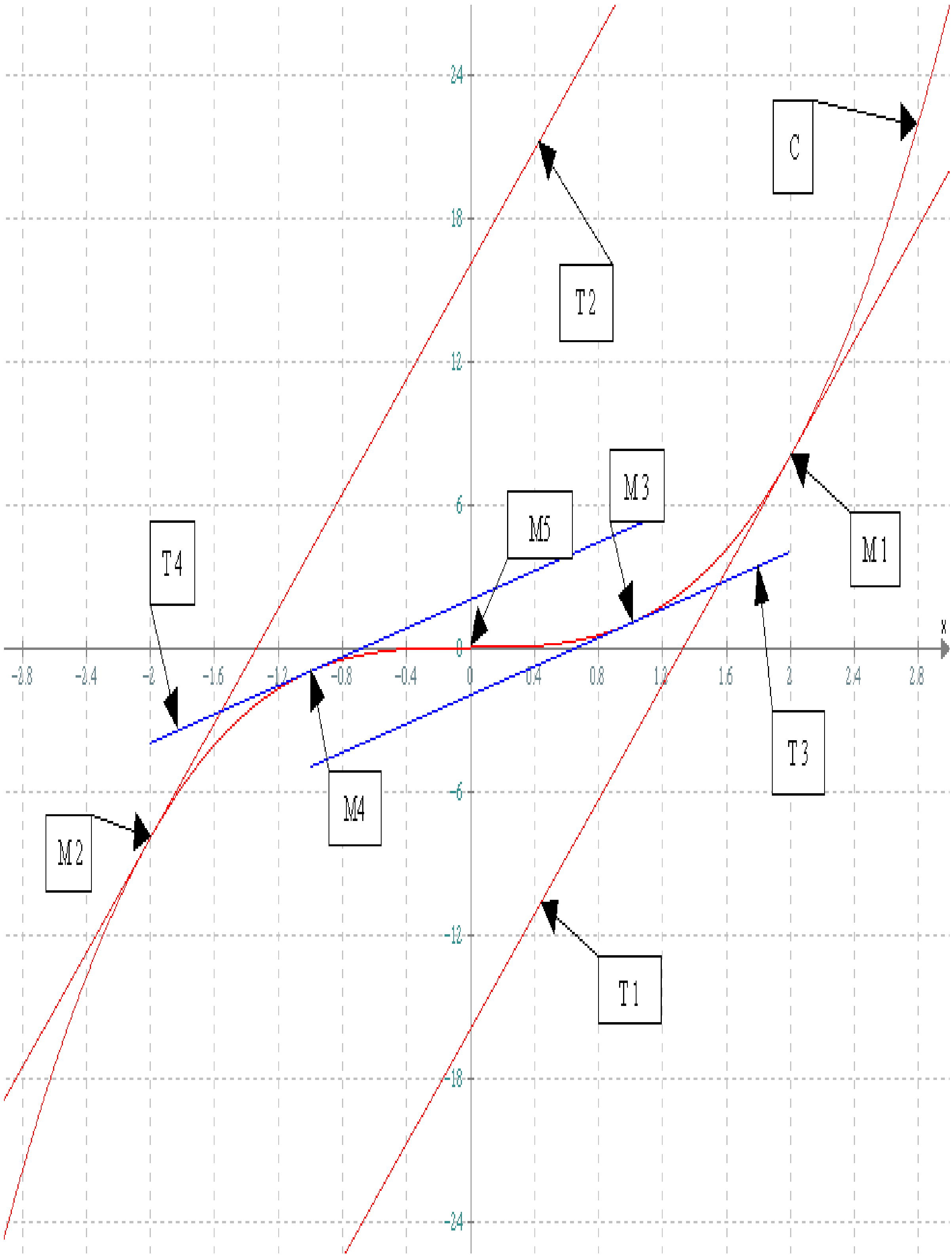
Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; a est un nombre appartenant à I.
*On appelle **nombre dérivé** de la fonction f au point A d'abscisse a, le coefficient directeur de la tangente en A ; on le note f ' (a).
L'équation de la tangente est de la forme y = f ' (a) . *x* + *m ;* pour déterminer m, on remplace x et y par les coordonnées du point A.

*Construction de la tangente à partir du nombre dérivé :





*La **fonction dérivée** de f est la fonction qui à tout nombre x de I associe son nombre dérivé f ' (x).



24
18
12
6
0
-6
-12
-18
-24
-2.8
-2.4
-2
-1.6
-1.2
-0.8
-0.4
0
0.4
0.8
1.2
1.6
2
2.4
2.8
x
C
T2
M3
M5
T4
M1
T3
M4
M2
T1

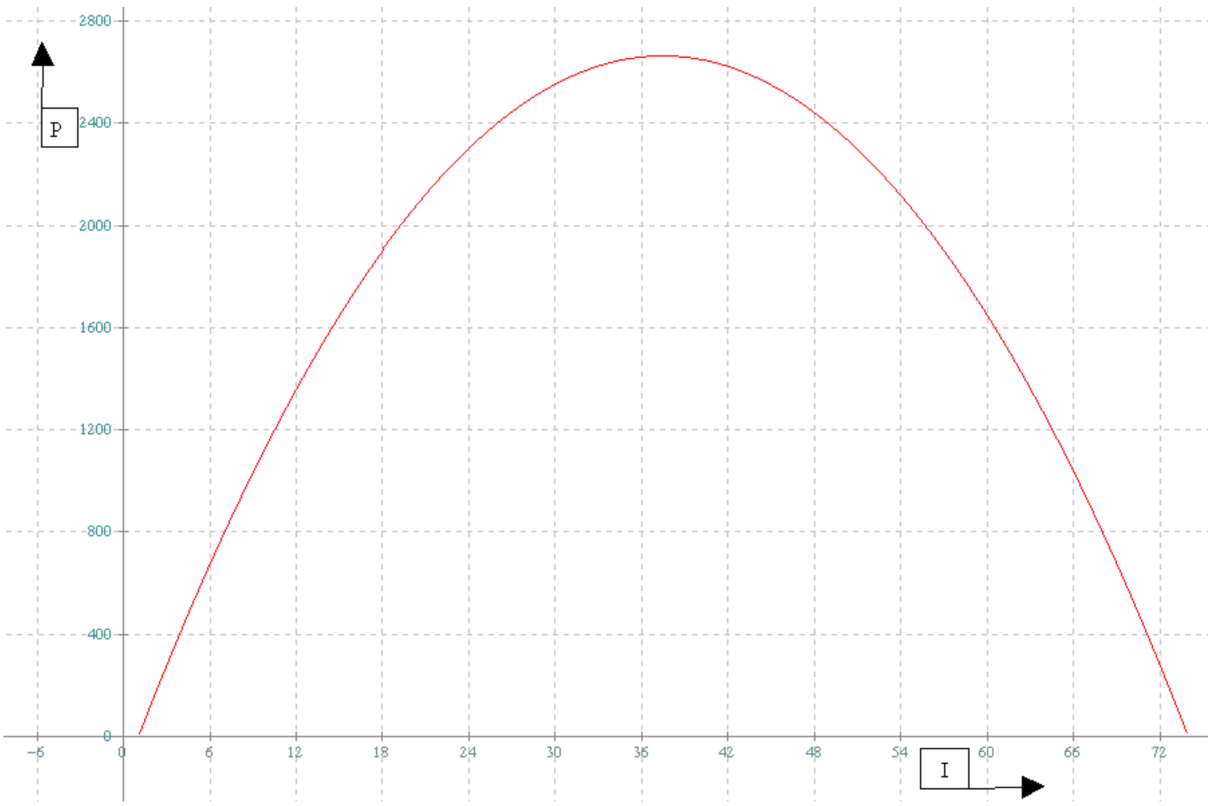
FONCTION DERIVEE

APPLICATION : COUPLE MAXIMAL

On se propose de déterminer le couple maximal d'un moteur par 2 méthodes.

La puissance mécanique utile Pu d'un moteur est donnée en fonction de l'intensité I par la relation Pu (I) = -2 I ² + 150 I – 148.

Le tracé de la courbe représentative de la fonction Pu en fonction de I est donnée ci-dessous :



1/Méthode graphique

par lecture graphique, déterminer la valeur de l'intensité I pour laquelle la puissance utile est maximale :

I = …………………………….

Pu max = ……………………

2/Méthode algébrique

a)Préciser l'intervalle d'étude de la fonction représentée ci-dessus.

I : […………… ; ………………]

b)Calculer la fonction dérivée P'u de la fonction Pu en utilisant le formulaire.

f ' (I) = ……………………………………………..

c)Déterminer pour quelle valeur de I cette dérivée s'annule en résolvant l'équation :

………..

d)Etudier le signe de la dérivée en résolvant les inéquations suivantes :

………..

e)En déduire le tableau de variation de la fonction Pu

I	[1 74]
Pu ' (I)	0
Pu (I)	

f)La fonction Pu admet-elle :

un minimum ? ?……………….   un maximum ? ?…………………….

Quelles sont les coordonnées de cet extremum ?

x =……………………..   y = …………………………

g)Déduire de la question précédente la puissance utile maximale Pu et l'intensité I correspondante :

……

Comparer ces valeurs à celles obtenues en 1/

…….. …

EVALUATION
REPRESENTATION GRAPHIQUE

Première partie

Soit la fonction f telle que $f(x) = x^2 + 4x$ définie sur l'intervalle [-4 ; 2].

1/Calculer la fonction dérivée f ' (x) =………………………….

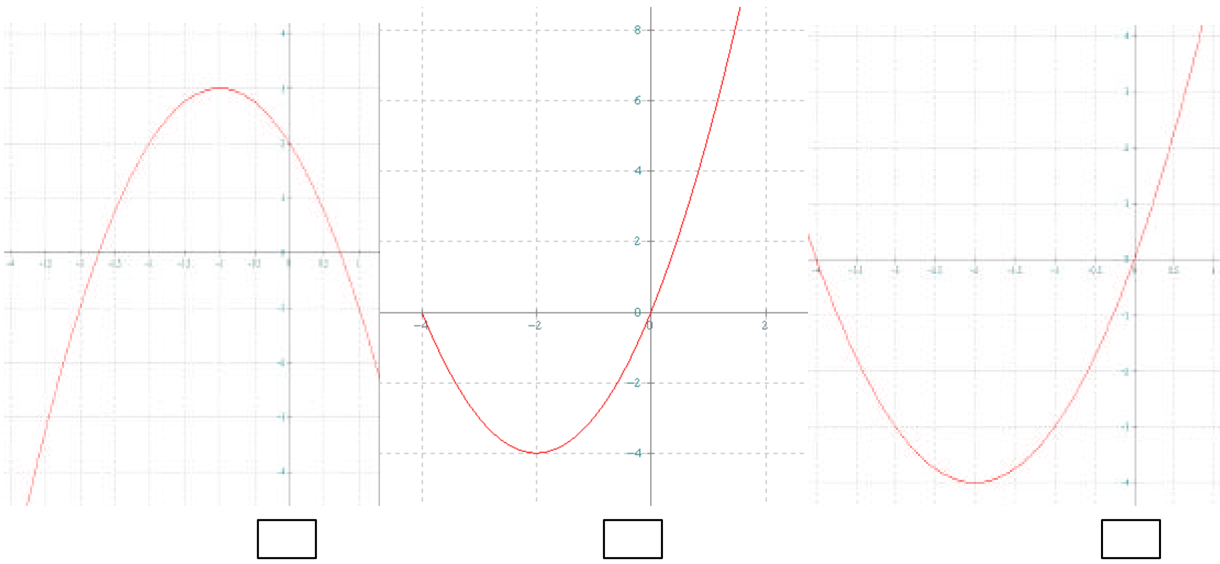
2/ Résoudre f ' (x) = 0 . ………………………………………………….

3/ Déterminer le signe de f ' (x) = 0 : …………………………….

En déduire le tableau de variation de la fonction f .

X					
f ' (x)					
f (x)					

parmi les graphiques ci-dessous, cocher la représentation graphique de la fonction f .



Document professeur

DERIVATION

Auteurs : D.Nicolas, S.Lambert, K.Maurin, K.Salehy, A.Abdelahi.

I Ce que dit le BO

La dérivation est une notion nouvelle. Il convient de l'aborder assez tôt pour pouvoir la pratiquer et l'exploiter dans des situations variées. Il est important de lier les aspects graphiques et numériques de la dérivation en un point.

a) Dérivation en un point

Tangente en un point à une courbe d'équation y = f(x)

La tangente en un point est considérée comme une notion intuitive obtenue graphiquement ; elle n'a pas à être définie.

Nombre dérivé d'une fonction en a :

On définit le nombre dérivé de la fonction f en a, comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a ; on le note f ' (a).

Si la fonction *f* admet une dérivée *f* ' nulle sur l'intervalle I, alors la fonction *f* est constante sur cet intervalle. Si la fonction f admet une dérivée *f ' à* valeurs positives (resp. négatives) sur l'intervalle I, alors la fonction f est croissante (resp. décroissante) sur cet intervalle.

b) Fonction dérivée :

Fonction dérivée d'une fonction, sur un intervalle

Les règles de calcul sont admises :

$f(x) = a$; $f(x) = x$; $f(x) = x^2$; $f(x) = x^3$

-dérivée de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, l'intervalle ne contenant pas 0.

-Dérivée d'une somme, d'un produit par une constante.

c) Application à l'étude du' sens de variation d'une fonction

Si la fonction *f* admet une dérivée *f* ' nulle sur l'intervalle I, alors la fonction *f* est constante sur cet intervalle. Si la fonction f admet une dérivée *f ' à* valeurs positives (resp. négatives) sur l'intervalle I, alors la fonction f est croissante (resp. décroissante) sur cet intervalle.

Ces propriétés sont admises.

II Les documents :

*Document professeur : pp 1 à 8

*Déroulement de la séance

*Document élèves : pp 1 à 8

Dérivation ,

Applications : Couple maximal,

Représentation graphique.

Les documents présentés ont été élaborés lors des stages sur les mathématiques en baccalauréat professionnel de 1999 à 2001, avec pour animateurs A.Redding et D.Nicolas.

DERIVATION

Nombre dérivé et fonction dérivée

I - Nombre dérivé .

1-Activité

Soit *(C)* la courbe représentative de la fonction *f* définie sur l'intervalle [-3 ;3] par:

$$f(x) = x^3$$

La courbe *(C)* est représentée dans le plan rapporté au repère orthogonal figurant sur l'annexe.

a)Le point M 1 de la courbe *(C)* a pour abscisse 2.
La droite T_1 est la tangente à la courbe *(C)* au point M 1 .
Déterminer graphiquement le coefficient directeur de (T 1).
Reporter votre résultat dans le tableau ci-dessous.

b) La droite T_2 est la tangente à *(C)* au point M 2.
Procéder de la même façon qu'au a) pour le point M 2 de (C) d'abscisse (-2).

c) Placer sur la courbe *(C)* le point M 3 d'abscisse (+1).
Tracer la tangente T_3 à *(C)* au point M 3.
Déterminer graphiquement le coefficient directeur de T_3, en arrondissant la valeur à l'unité.
Reporter votre résultat arrondi à l'unité dans le tableau ci-dessous.

d) Procéder de la même manière pour les points M 4 et M 5 d'abscisses respectives (-1) et (0).

Points	M 1	M 2	M 3	M 4	M 5
Abscisse *x* du point	2	-2	1	-1	0
Coefficient directeur	12	12	3	3	0

2- Définition

On définit le **nombre dérivé** de la fonction *f* en a … : comme le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a ; on le note f ' (a).

Application :

Le nombre dérivé de 2, noté… f ' (2) est … : 12

Compléter : f ' (0) =…0………..

F ' (-1)=… 3………..

I I –Fonction dérivée

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
On appelle fonction dérivée de f, notée *f '*, qui à tout nombre réel *x* associe son nombre dérivé *f ' (x)*.

Dans le même repère que la courbe (C), placer les points Ai

-d'abscisse x

-d'ordonnée : la valeur du coefficient directeur : …f ' (x) …….

Par exemple, placer le point A1 : (2 ; f ' (2) = 12)

Tracer ensuite la courbe passant par ces points.

Quel est le nom de cette courbe ? : une parabole

Quelle est l'équation générale de cette courbe ? : …ax ²…….

A l'aide des valeurs du tableau de l'activité 1 du paragraphe I, déterminez la valeur du coefficient inconnu.

x	2	-2	1	-1
f ' (x)	12	12	3	3
a= f ' (x) / (x ²)	3	3	3	3

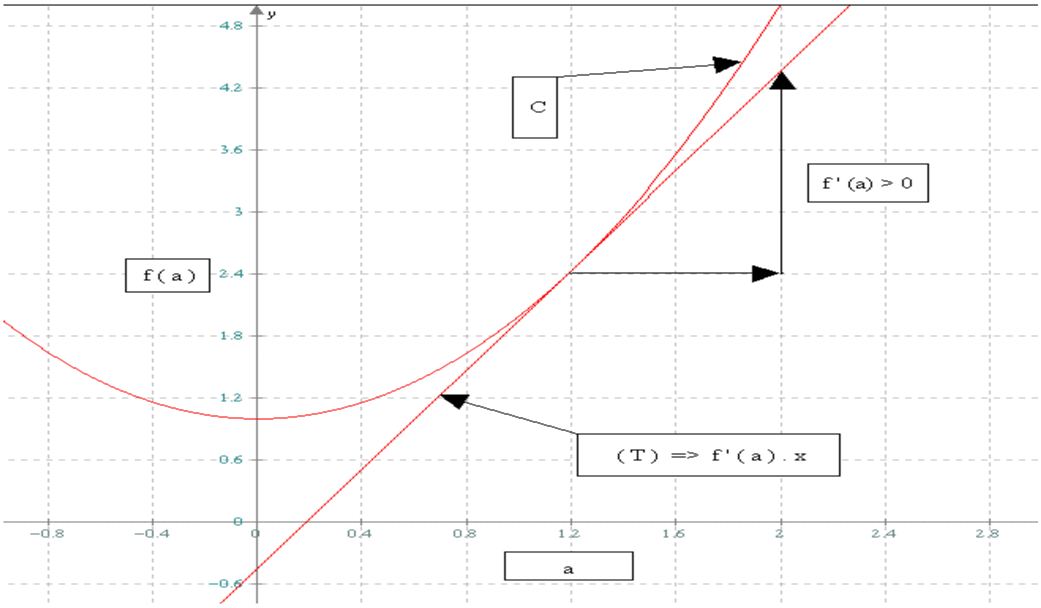
donc f ' (x) = ……3 x ²……

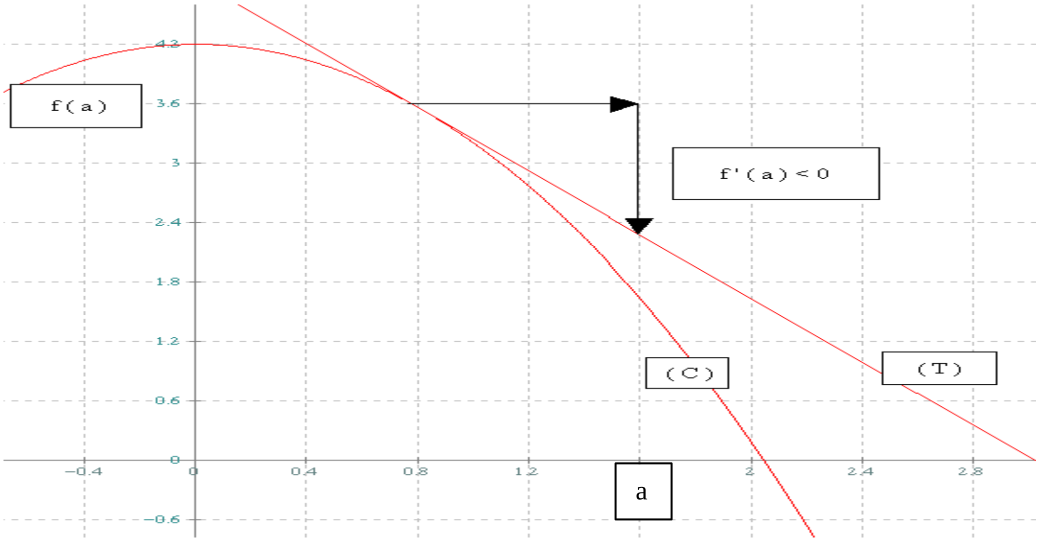
La fonction f ' définie par ……f ' (x) =3 x ² ….. est la fonction dérivée de la fonction f définie par ……f (x) = x^3…….

III – L'ESSENTIEL

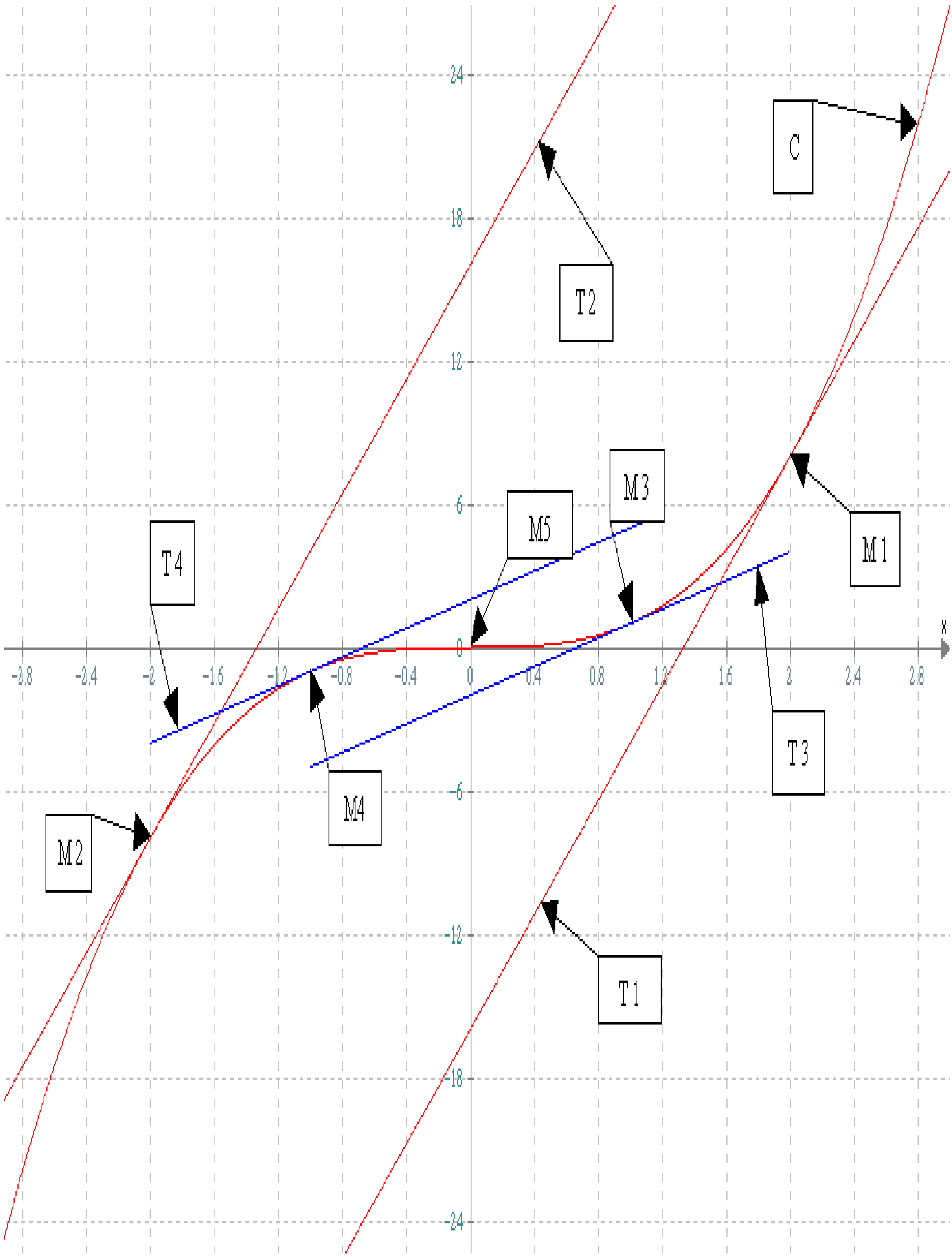
Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; a est un nombre appartenant à I.
*On appelle **nombre dérivé** de la fonction f au point A d'abscisse a, le coefficient directeur de la tangente en A ; on le note f ' (a).
L'équation de la tangente est de la forme y = f ' (a) . *x* + *m ;* pour déterminer m, on remplace x et y par les coordonnées du point A.

*Construction de la tangente à partir du nombre dérivé :





*La **fonction dérivée** de f est la fonction qui à tout nombre x de I associe son nombre dérivé f ' (x).

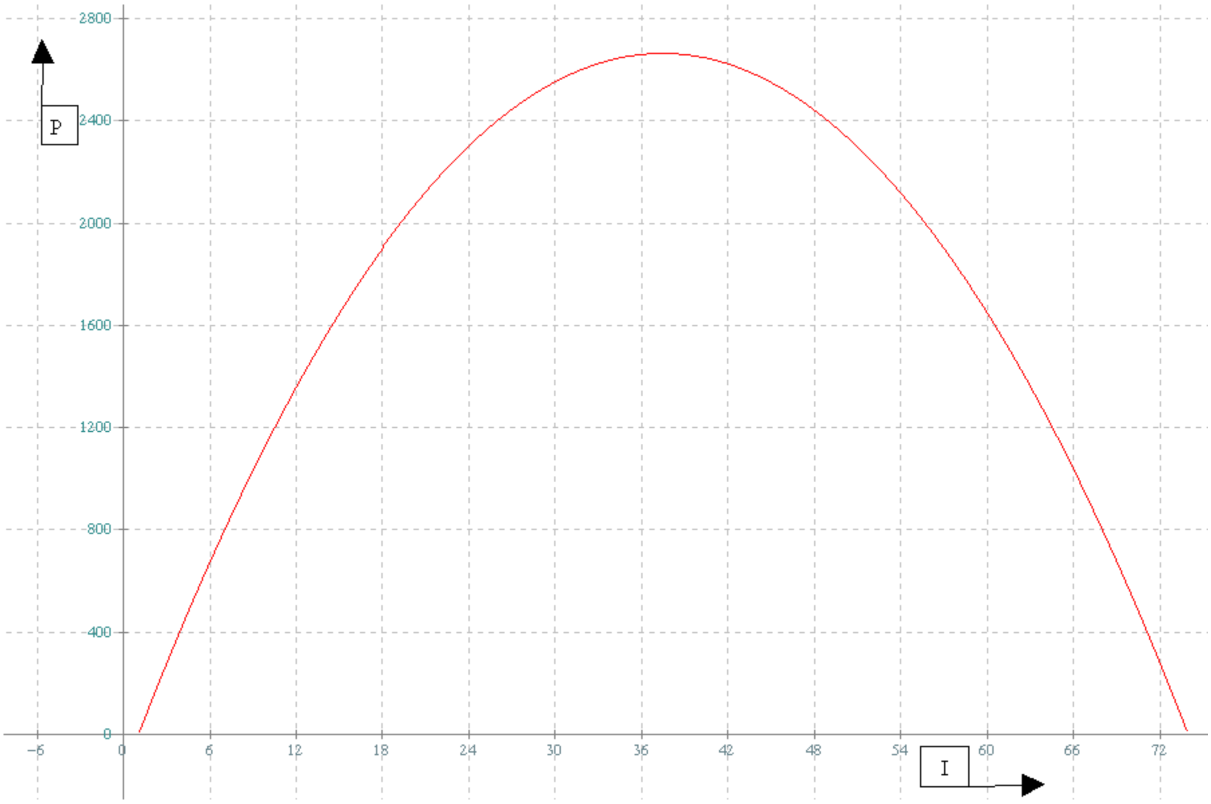


C
T 2
M 3
M5
T 4
M 1
T 3
M 2
M4
T 1
x
24
18
12
6
0
-6
-12
-18
-24
-2.8
-2.4
-2
-1.6
-1.2
-0.8
-0.4
0
0.4
0.8
1.2
1.6
2
2.4
2.8

FONCTION DERIVEE

APPLICATION : COUPLE MAXIMAL

On se propose de déterminer le couple maximal d'un moteur par 2 méthodes.
La puissance mécanique utile Pu d'un moteur est donnée en fonction de l'intensité absorbée I par la relation $Pu(I) = -2 I^2 + 150 I - 148$.
Le tracé de la courbe représentative de la fonction Pu en fonction de I est donnée ci-dessous :



1/Méthode graphique

par lecture graphique, déterminer la valeur de l'intensité I pour laquelle la puissance utile est maximale

I = 38 A

Pu max = 2700 W

2/Méthode algébrique

a)Préciser l'intervalle d'étude de la fonction représentée ci-dessus.

I : [1 ; 74]

b)Calculer la fonction dérivée P'u de la fonction Pu en utilisant le formulaire.

F ' (I) = - 4 I + 150

c)Déterminer pour quelle valeur de I cette dérivée s'annule en résolvant l'équation :

- 4 I + 150 = 0

I = 37,5

d)Etudier le signe de la dérivée en résolvant les inéquations suivantes :

Pu ' (I) > 0 → pour I < 37.5

Pu ' (I) < 0 → pour I > 37.5

e)En déduire le tableau de variation de la fonction Pu

I	[1		37.5		74]
P ' (I)		+	0	-	
P (I)	0	$\nearrow$	2664.5	$\searrow$	0

f)La fonction Pu admet-elle :

un minimum ? ? non un maximum ? ? oui

Quelles sont les coordonnées de cet extremum ?

x = 37,5

y = 2664.5

g)Déduire de la question précédente la puissance utile maximale Pu et l'intensité I correspondante :

Pu = 2664.5 W

I = 37.5 A

Comparer ces valeurs à celles obtenues en 1/

…aux précisions de lecture, on obtient les mêmes valeurs…

EVALUATION

REPRESENTATION GRAPHIQUE

Première partie

Soit la fonction f telle que f (x) = x² + 4 x définie sur l'intervalle [-4 ; 2].

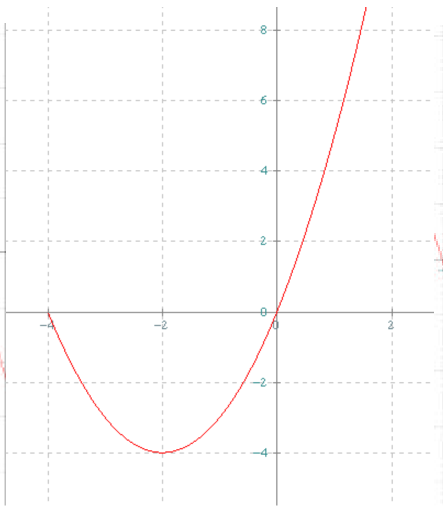
1/Calculer la fonction dérivée f ' (x) = 2x+4

2/ Résoudre f ' (x) = 0 : x= - 2

3/ Déterminer le signe de f ' (x) = 0. En déduire le tableau de variation de la fonction f .

X	-4	-2	0	1	2
f ' (x)	-	0	+	+	+
f (x)	0	-4	0	5	12

parmi les graphiques ci-dessous, cocher la représentation graphique de la fonction f .



oui