PROBABILITES

1) EXPERIENCES ALEATOIRES

A) EXPERIENCE ALEATOIRE , EVENTUALITE , UNIVERS

Un exemple bien connu : *(On considère cet exemple jusqu'à la fin du chapitre)*

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

Lancer ce dé **et noter** le nombre figurant sur une des faces est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat (1 , 2 , … , 6 ?).

On dit qu'il s'agit d'une **expérience aléatoire** , c'est à dire une expérience liée au hasard pouvant conduire à plusieurs issues, appelées **éventualités**.

Ex : les éventualités sont 1 , 2 , 3 , 4 , 5 et 6

L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers** . En général, on le note Ω .

Ex : Ω = { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }

B) EVENEMENT

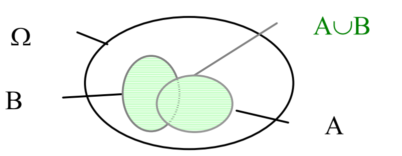
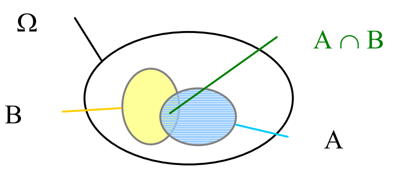
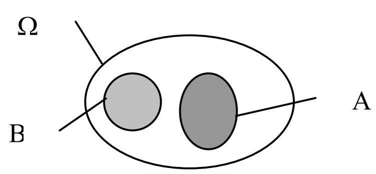
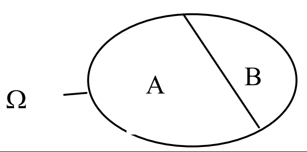
On appelle **événement** toute partie de l'univers .

Une éventualité ω **appartient** à l'univers Ω (on note ω ∈ Ω) . Un événement A est **inclus** dans l'univers Ω (on note A ⊂ Ω)

Ex : Par exemple, on peut considérer l'événement A : « obtenir un nombre pair » . On a A = { 2 ; 4 ; 6 }

Rem : Lorsqu'une éventualité ω appartient à un événement A, on dit que ω réalise A.

Le tableau ci-dessous résume les définitions et notations importantes relatives à la notion d'événement.
A, B et C représentent des événements d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire.

VOCABULAIRE ET NOTATION	SIGNIFICATION	EXEMPLE
Cardinal de A : card (A)	nombre d'éventualités qui composent A	L'événement A : « obtenir un nombre pair » est composé de 3 éventualités . card (A) = 3
Evénement élémentaire	événement réduit à une seule éventualité	L'événement B : « obtenir le nombre 3 » ; B = { 3 }
Evénement impossible : A = ∅	événement qui ne se réalise jamais	L'événement C : « obtenir un multiple de 3 inférieur ou égal à 2 »
Evénement certain : A = Ω	événement qui se réalise toujours	L'événement D : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 »
C est **la réunion** de A et de B : C = A ∪ B (on dit A ou B)	C est l'ensemble des éventualités réalisant A ou B 	Soit l'événement E : « obtenir un nombre au moins égal à 4 » ; E = { 4 ; 5 ; 6 } Soit l'événement F : « obtenir un nombre impair » ; F = { 1 ; 3 ; 5 } L'événement E ∪ F est « obtenir un nombre au moins égal à 4 ou un nombre impair » E ∪ F = { 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }
C est **l'intersection** de A et de B : C = A ∩ B (on dit A et B)	C est l'ensemble des éventualités réalisant A et B en même temps. 	L'événement E ∩ F est « obtenir un nombre au moins égal à 4 et un nombre impair » c'est à dire « obtenir un nombre impair au moins égal à 4 » E ∩ F = { 5 }
A et B sont **disjoints** ou **incompatibles**	A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps ; A ∩ B = ∅ 	Les événements E et B sont incompatibles . E ∩ B = ∅
A et B sont **contraires** ou **complémentaires**. B = $\overline{A}$	A ∩ B = ∅ et A ∪ B = Ω $\overline{A}$ est l'événement constitué par les éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A . 	Les événements A et F sont contraires. F = $\overline{A}$

2) LOI DE PROBABILITE SUR UN ENSEMBLE FINI

A) DEFINITION

On note $\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 \ \dots \ \omega_n \}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chaque résultat ω_i un nombre p_i (appelé probabilité de l'issue ω_i) positif ou nul de telle façon que :

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$
- La probabilité d'un événement A, notée P (A) , est la somme des probabilités p_i des éventualités qui constituent A.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité sur l'ensemble Ω des résultats possibles.
Les conditions de l'expérience conduisent le plus souvent au choix du modèle.

On garde ces notations pour le reste du chapitre.

Rem : Pour toute éventualité w_i on a : $0 \leq p_i \leq 1$.

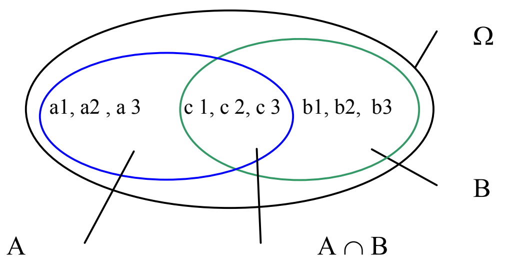
B) PROPRIETES

Soit A et B deux événements de Ω, alors :

- La probabilité de l'événement certain est 1 ; $P(\Omega) = 1$
- La probabilité de l'événement impossible est 0 ; $P(\varnothing) = 0$
- Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  Si A et B sont incompatibles , $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Considérons l'exemple suivant *(dans le cas général, la démonstration est la même)*



Preuve : (des deux dernières propriétés)

1)
On a : $A = \{a1 , a2 , a3 , c1, c2 , c3 \}$ et $B = \{ b1 , b2 , b3 , c1 , c2 , c3 \}$
De plus $A \cap B = \{ c1 , c2 , c3 \}$ et $A \cup B = \{ a1 , a2 , a3 , c1, c2 , c3 , b1 , b2 , b3 \}$
On a alors :

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(\{a1\}) + P(\{a2\}) + P(\{a3\}) + P(\{c1\}) + P(\{c2\}) + P(\{c3\})}_{=P(A)} + P(\{b1\}) + P(\{b2\}) + P(\{b3\})$$

$$= P(A) + P(\{b1\}) + P(\{b2\}) + P(\{b3\})$$

Or :

$$P(B) = P(\{c1\}) + P(\{c2\}) + P(\{c3\}) + P(\{b1\}) + P(\{b2\}) + P(\{b3\})$$

$$= P(A \cap B) + P(\{b1\}) + P(\{b2\}) + P(\{b3\})$$

on en déduit que :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Par abus de langage, on note souvent P (ω) au lieu de P ({ω})

Si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \varnothing$ et $P(A \cap B) = 0$, d'où $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2) On a $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$. Ainsi d'après la propriété précédente, on a : $P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) - P(A \cap \overline{A})$
Or $P(\Omega) = 1$ et $P(A \cap \overline{A}) = 0$ …

C) CAS PARTICULIER : EQUIPROBABILITE

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** .
Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n éventualités w_i , on a :

$$pi = P(\{ w_i \}) = \frac{1}{\text{card}(\text{Ù})} = \frac{1}{n}$$

On a alors, pour tout événement A : $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Rem :
Les expressions suivantes « dé parfait ou équilibré » , « boule tirée de l'urne au hasard » , « boules indiscernables » … indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

Ex :
Le dé est non truqué : chacune des faces à la même chance d'être obtenue . Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
Dans ce cas, il est donc aisé de définir la loi de probabilité :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On présente souvent les résultats dans un tableau

La probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre pair » est : $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

D) LOI DES GRANDS NOMBRES

Lorsque qu'on répète une expérience aléatoire, on appelle fréquence d'apparition d'une éventualité donnée, noté w_i le nombre :

$$f_i = \frac{\text{nombre de fois où l'éventualité } \omega_i \text{ apparaît}}{\text{nombre de fois où l'expérience est répétée}}$$

On constate que si l'on répète un grand nombre de fois l'expérience donnée, les différentes fréquences d'apparition ont tendance à se stabiliser, ce qui n'est parfois que théorique car répéter une expérience aléatoire dans les mêmes conditions n'est pas toujours envisageable.

Ce constat est un résultat mathématique appélé « La loi des grands nombres » ; Il se démontre, mais la démonstration est largement hors de vos compétences :

Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.

Rem :

- Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle choisi à priori.
- Dans d'autres cas, lorsqu'on ne connaît pas de loi de propabibilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d'un grand nombre d'expériences.

Ex : (faire l'expérience avec Excel)

Lorsqu'on jette n fois le dé, la fréquence d'apparition de chacun des nombres est très variable lorsque n est petit et se stabilise autour de $\frac{1}{6}$ pour n grand . La loi de probabilité que nous avons définie (grâce à la situation d'équiprobabilité) pour l'expérience aléatoire est bien validée …

E) ESPERANCE, VARIANCE, ECART TYPE D'UNE LOI DE PROBABILITE

Si les issues de l'expérience aléatoire sont **des nombres réels,** on peut définir les nombres ci-contre :

- **L'espérance mathématique** de la loi de probabilité est le nombre μ défini par :

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \omega_i$$

- **La variance** de la loi de probabilité est le nombre V défini par :

$$V = \sum_{i=1}^{n} p_i (\omega_i - \mu)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, \omega_i^2 \right) - \mu^2$$

- **L'écart type** de la loi de probabilité est le nombre σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$

3) VARIABLES ALEATOIRES

A) DEFINITION

Soit Ω l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

- On appelle **variable aléatoire** toute fonction X de Ω dans IR qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel x.
- L'événement de Ω, noté { X = x }, est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X.
- L'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X . Cet ensemble est noté Ω'.

Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.

En général, une variable aléatoire est notée X, Y , Z …

Ex :

Avec l'exemple de départ, on peut définir une variable aléatoire X de la façon suivante :

- X = 0 si le nombre est pair
- X = 1 si le nombre est impair

L'ensemble image de Ω par X est Ω' = { 0 ; 1 }

B) LOI DE PROBABILITE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE (on dit aussi loi image de la variable aléatoire)

Soit Ω = { ω_1 , ω_2 … ω_n } un ensemble sur lequel a été définie une loi de probabilité.
Ω' = { x_1 , x_2 … ,x_m } est l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
La loi de probabilité de X est la fonction définie sur Ω', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p_i' = P (X = x_i)$

On démontre facilement que $\sum_{i=1}^{m} p_i' = 1$

Ex :

La loi de probabilité de la variable aléatoire définie ci-dessus est :

x_i	0	1
$p_i' = P (X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

C) ESPERANCE, VARIANCE

L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X sont respectivement l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la loi de probabilité de X définie sur Ω'.

Les notations respectives sont E (X) , V (X) et σ (X).

Ex :

$E (X) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

$V (X) = \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\sigma (X) = \frac{1}{2}$