

Répétition de géométrie élémentaire

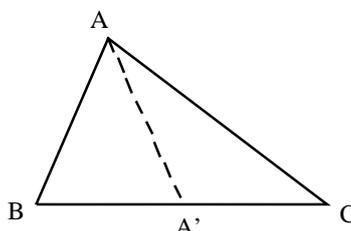
Prérequis : géométrie élémentaire

Requis pour : trigonométrie, géométrie analytique du plan

I. Lignes remarquables dans un triangle quelconque

Médiane

Segment passant par un sommet du triangle et le milieu du côté opposé.

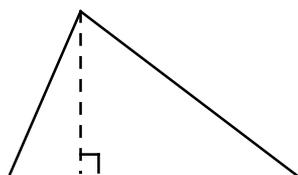


Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

Leur point d'intersection est le centre de gravité du triangle. Il est situé aux $\frac{2}{3}$ des segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$.

Hauteur

Segment passant par un sommet du triangle et étant perpendiculaire au côté opposé.

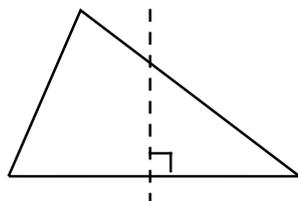


Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Leur point d'intersection est appelé orthocentre du triangle.

Médiatrice

Droite passant perpendiculairement par le milieu d'un côté du triangle.

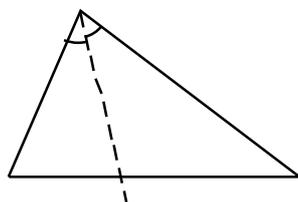


Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Leur point d'intersection est le centre du cercle circonscrit.

Bissectrice

Droite passant par un sommet du triangle et partageant l'angle en ce sommet en deux angles égaux.

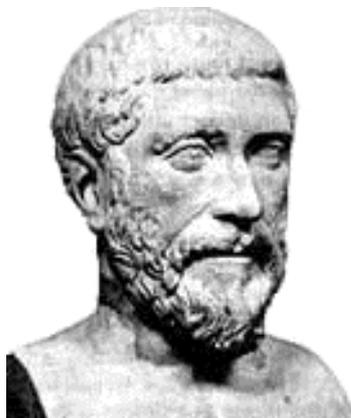


Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.

Leur point d'intersection est le centre du cercle inscrit.

II. Théorèmes importants

Le théorème de Pythagore



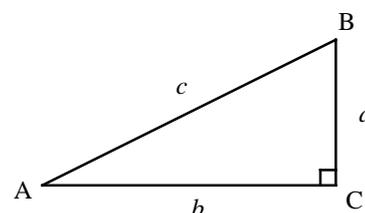
Pythagore (570-480 av. J.-C.)

Si le triangle ABC est un triangle rectangle, alors

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Les nombres entiers satisfaisant cette relation sont appelés *triplets de Pythagore*. Les plus connus sont (3, 4, 5), (5, 12, 13) et leurs multiples.

Il existe des dizaines de démonstrations du théorème de Pythagore. Pourriez-vous en donner une ? Vous en trouverez plusieurs à l'adresse ci-contre.

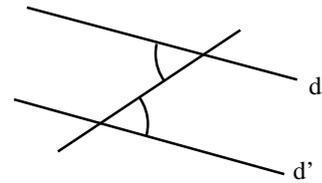


Le côté c opposé à l'angle droit est appelé **hypoténuse** (sans h après le t).

Parallélisme

Si $d \parallel d'$, alors $\angle = \angle$.

Si $\angle = \angle$, alors $d \parallel d'$.

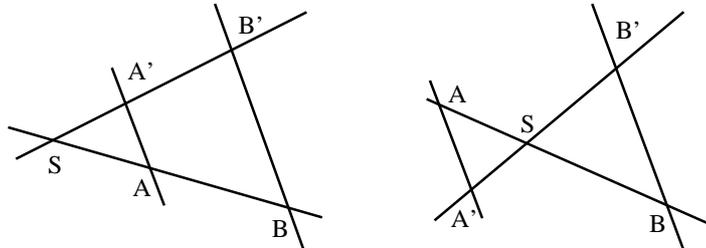


Le théorème de Thalès



Thalès de Milet (625-547 av. J.-C.)

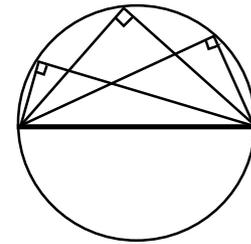
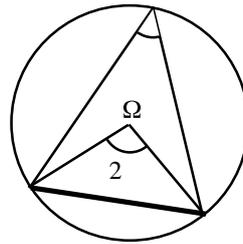
Plusieurs droites parallèles déterminent sur des sécantes des segments proportionnels.



Si $AA' \parallel BB'$ alors $\frac{SA}{SB} = \frac{SA'}{SB'} = \frac{AA'}{BB'}$

Conséquence : Si deux triangles sont semblables (i.e. leurs trois angles sont égaux), leurs côtés homologues sont proportionnels.

Angles inscrits dans un cercle



Demi-cercle de Thalès

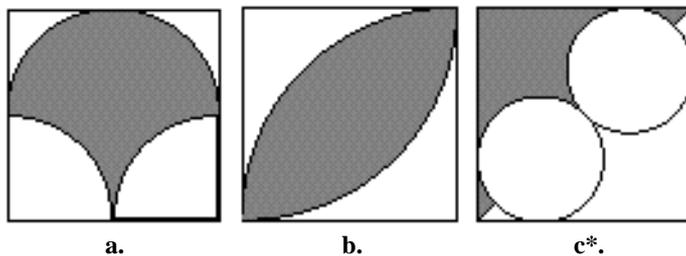
III. Exercices

Exercice 1

Réponses

- a. $\frac{a^2}{2}$
- b. $a^2(\frac{1}{2} - 1)$
- c. environ $0.2305a^2$

Calculez les aires des domaines gris.
La longueur des côtés des carrés est a .

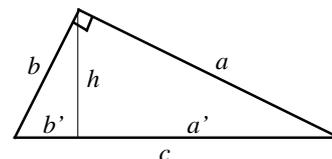


Exercice 2

Attention ! Ce théorème ne marche qu'avec des triangles rectangles !

Démontrez le **théorème de la hauteur** qui dit que

$h^2 = a'b'$



Exercice 3

$$\text{Rép. } h = \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

Quelle est la valeur de la hauteur h d'un triangle équilatéral de côté a ?
Que vaut son aire A ?

Vous pourrez utiliser ce résultat pour de nombreux problèmes...

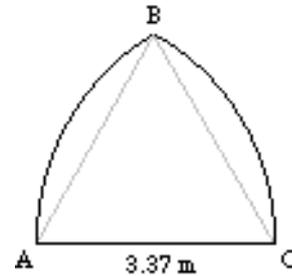
Exercice 4

Rép. 7 m^2

Dans une cathédrale, un vitrail a la forme ci-contre.

Nous y observons que AB est un arc de cercle de centre C , que BC est un arc de cercle de centre A , la longueur d' AC étant de 3.37 m .

Ce vitrail mesure-t-il autant de m^2 qu'il y a de vertus théologiques, de péchés capitaux, d'apôtres ou de commandements de Dieu ?

**Exercice 5**

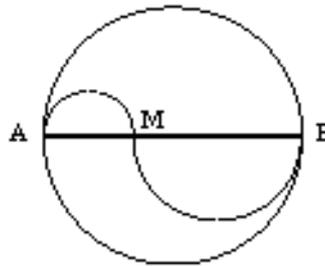
Rép. $2.527 L^2$

Un pare-brise est balayé par deux essuie-glaces de longueur L articulés autour de deux points distants de L . Chacun d'eux couvre ainsi un demi-disque. Quelle est la surface totale balayée ?

Exercice 6

Rép. 18

Soit un triangle inscrit dans un cercle de rayon 15. Un de ses côtés passe par le centre du cercle. Un autre de ses côtés a une longueur de 24. Quelle est la longueur du troisième côté ?

Exercice 7

Soit un cercle de rayon r .

Calculez la longueur du chemin incurvé AMB .

Le point M est situé « quelque part » sur le diamètre AB .

Exercice 8

On dispose d'une corde d'une longueur $\ell =$. Parmi les trois figures géométriques suivantes, laquelle doit-on former avec la corde pour couvrir la plus grande surface : un triangle équilatéral, un carré ou un cercle ?

Calculez les trois aires et comparez !

Exercice 9

Rép. environ 58 millions de Lunes

Depuis la Terre, la Lune et le Soleil semblent à peu près de même grosseur. Sachant que le Soleil est environ 387 fois plus éloigné que la Lune, combien faudrait-il de Lunes pour occuper un volume équivalent à celui du Soleil ?

Exercice 10

Réponses

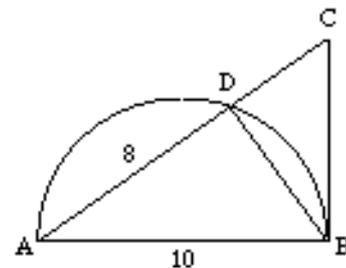
$$[BD] = 6$$

$$[AC] = 12.5$$

$$[BC] = 7.5$$

Soit la figure ci-contre.

Calculez la longueur des segments $[BD]$, $[AC]$ et $[BC]$.

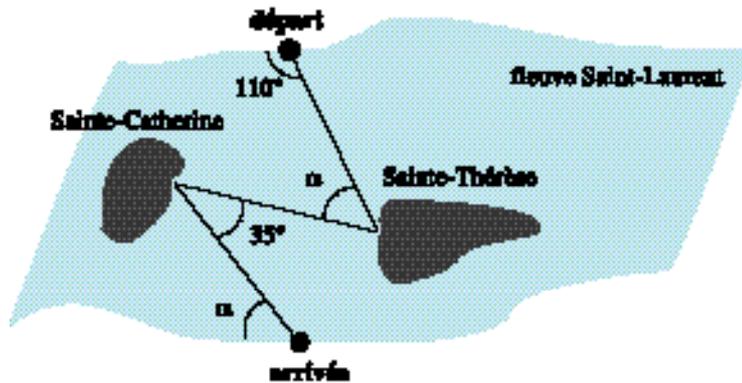


Exercice 11

Rép. = 52.5°



« Pour traverser le Saint-Laurent, je me suis arrêté sur l'île Sainte-Thérèse, puis sur l'île Sainte-Catherine, en suivant le plan ci-dessous :



C'est le fun. Mais pour trouver la valeur des deux angles indiqués, ce n'est pas le fun... ».

Exercice 12

Entourez un ballon de football avec une ficelle rouge. Allongez ensuite la ficelle de manière à entourer le ballon tout en restant à 1 mètre de sa surface. Entourez alors la Terre (supposée sphérique) entière avec une ficelle bleue et allongez cette ficelle de façon à entourer la Terre tout en restant à 1 m de sa surface. Quel est, selon vous, le plus grand des deux allongements ? Celui de la ficelle rouge autour du ballon de football ou celui de la ficelle bleue entourant la Terre ?

Exercice 13

Réponses

a. $\frac{\sqrt{3}}{2} a^3$ b. $\frac{1}{6} a^3$ c. $2 a^2$

Soit un cube d'arête a .

- Calculez le volume de la sphère circonscrite au cube.
- Calculez le volume de la sphère inscrite dans le cube.
- Calculez l'aire de la sphère tangente aux douze arêtes du cube.

Exercice 14

Réponses

a. $V = r^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right) H$

b. $A = 2 r \frac{(R-r)H}{R}$

Soit un cylindre de rayon r inscrit dans un cône droit de hauteur H et de rayon de base R .

- Calculez le volume V du cylindre.
- Calculez son aire latérale A .

Exercice 15

Construisez le développement d'une pyramide régulière dont la base est un hexagone régulier de 3 cm de côté et dont la hauteur est de 4 cm.

Exercice 16

Réponses

a. 216 b. 96

Les diagonales d'un losange ont des longueurs de 8 et 18 cm. Comparez les volumes des solides engendrés par la rotation du losange autour de...

- sa petite diagonale
- sa grande diagonale.

Exercice 17

Rép. $V = \frac{1}{3} h^2 (2R - h)$

Calculez le volume d'un cône droit de hauteur h inscrit dans une sphère de rayon R .

Exercice 18

Construisez le lieu géométrique des points d'où l'on voit un segment $[AB]$ sous un angle de 30°.

Exercice 19

La tradition rapporte que *Thalès*, en visite à Alexandrie, réussit à mesurer la hauteur de la grande pyramide (qui avait déjà un millénaire et demi) grâce à un simple bâton. C'est en hommage à l'astuce ayant permis cette mesure que le théorème correspondant fut attribué à *Thalès* par les mathématiciens du 18^e siècle. Comment s'y prit-il ?

Exercice 20

Rép. 6548 km (rayon réel : 6371 km)

Quelque part dans le monde, à midi, il n'y a pas d'ombre. Au même moment, à 800 km de là, on voit le Soleil sous un angle de 7° avec la verticale du lieu.

Déduisez de cette observation que la Terre est ronde et calculez le rayon de la Terre.

Note historique *Ératosthène de Cyrène* fit une mesure étonnamment précise de la circonférence de la Terre. Les détails furent données dans son traité « Sur la mesure de la Terre » qui est aujourd'hui perdu. Cependant, on sait par d'autres auteurs qu'il a comparé l'ombre de midi à Syène (ville qui s'appelle aujourd'hui Aswan, sur le Nil, en Égypte) et à Alexandrie. Il a supposé que le Soleil était tellement éloigné que ses rayons sont quasiment parallèles, et, connaissant la distance entre Syène et Alexandrie, il pu donner comme circonférence de la Terre une longueur de 250'000 stades.



Ératosthène de Cyrène
(276-194 av. J.-C.)

Exercice 21*

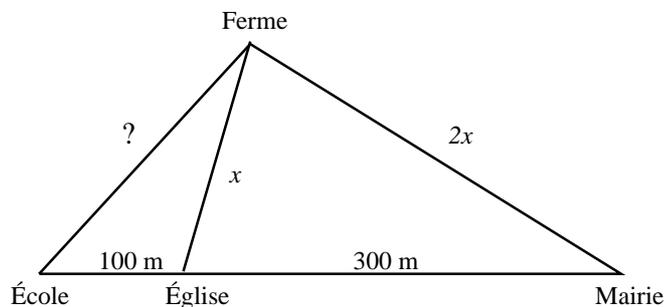
Quand elle est visible à la tombée de la nuit, Vénus s'appelle l'Étoile du Berger. Cette planète disparaît derrière l'horizon au plus tard trois heures après le Soleil. Que peut-on en déduire pour la distance entre Vénus et le Soleil ?

En 1991, le jour où Vénus s'est couchée le plus tard après le Soleil a été le 14 juin, et c'est le 2 novembre qu'elle s'est levée le plus tôt avant lui. Que peut-on en déduire pour la période de Vénus ?

Exercice 22**

Rép. 200 m

Dans notre village, il n'y a qu'une seule route toute droite sur laquelle on rencontre successivement l'école, puis 100 m plus loin l'église et enfin 300 m plus loin la mairie. Notre ferme se trouve au milieu des champs, deux fois plus éloignée de la mairie que de l'église. À quelle distance est-elle de l'école ?



Exercice 23

Commentez et expliquez la bande dessinée ci-dessous.

