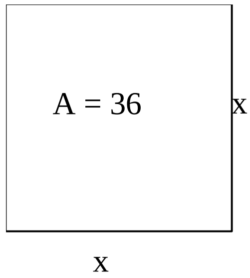
Racines carrées, cubiques et n^{èmes}

2.1 Petite histoire des racines carrées :

Depuis l'avènement des calculatrices, les racines carrées ont perdu beaucoup de leur prestige. Les racines carrées sont des nombres dont on n'a pas l'habitude parce qu'on ne les rencontre pas dans la vie courante : ce sont des nombres, à proprement parler, « mathématiques » ; et ils sont de ce fait plus difficile à concevoir que les nombres « ordinaires », sans que cette difficulté soit le moins du monde insurmontable.

Dans ***racine carrée***, on entend ***racine***, qui évoque l'idée d'un nombre « enfoui » dans un autre, et ***carré***, qui renvoie pour ses deux significations tant géométrique qu'arithmétique, à la figure du carré, bien connue depuis l'enfance. Les racines carrées ont en effet leur origine dans le problème consistant à trouver le côté d'un carré dont l'aire est donnée.

<u>Exemple</u> :



Si l'aire d'un carré est de 36, la réponse est facile à donner, et on trouve sans calculatrice que le côté est de 6 unités de longueur.

$$x = \sqrt{36} = 6 \text{ car } 6^2 = 36$$

Il y a donc des *racines carrées* faciles à trouver, ce sont celles des nombres carrés ; on dira donc que la racine carrée de 36 est 6, celle de 25 est 5, celle de 49 est 7, celle de 9 est 3, …
Ce qui s'écrit :

$$\sqrt{36} = 6 \;\; (\text{car } 6^2 = 36) \qquad \sqrt{25} = 5 \qquad \sqrt{49} = 7 \qquad \dots$$

Les choses se compliquent lorsqu'on pose la question pour d'autres nombres que ceux qui, d'avance, sont des carrés, tels 42, 26, 35 ou 5.

La ***recherche arithmétique*** (comme si la calculatrice n'existait pas ou ne disposait pas de la touche $\sqrt{\ }$) permettrait, par essais successifs, de trouver une approximation décimale de $\sqrt{2}$, par exemple. On peut trouver $\sqrt{2} \approx 1{,}414$. On démontre par ailleurs, qu'aucune fraction, même non décimale, ne peut avoir pour carré 2. Arrivé à ce point, on se dit que peut-être ce nombre n'existe pas, et qu'il faut en tout cas abandonner la « recherche arithmétique » et procéder autrement.

Pour la ***recherche géométrique*** le problème consiste à se demander s'il existe un carré de 2 unités carrées d'aire. Le petit « puzzle » consiste à effectuer le découpage de deux carreaux unité (figure 1) en quatre moitiés (figure 2). En les disposant convenablement on obtient le carré de 2 unités carrées (figure 3).

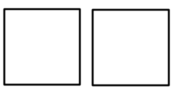


Figure 1.

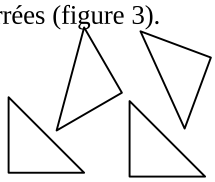


Figure 2.

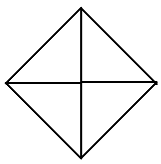


Figure 3.

Que peut-on dire de son côté ? Il faut se résigner à l'idée qu'aucune mesure, au sens habituel du terme, ne peut rendre compte de la longueur du côté d'un tel carré.

Ainsi ce nombre « nouveau », qui ne peut s'écrire ni comme un décimal ni comme une fraction, est un élément de l'ensemble des nombres **irrationnels**. On le nommera donc « racine carrée de 2 », en acceptant que cette racine carrée ne « fasse » rien d'autre qu'elle même. En effet $\sqrt{36}$ fait 6, mais $\sqrt{2}$ ne fait rien d'autre que d'être racine carrée de 2, autrement dit : $\sqrt{36} = 6$ et $\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Dans un cas le calcul aboutit et dans l'autre non : $\sqrt{2}$ reste «en suspens » mais c'est un nombre parfaitement défini puisqu'on sait que son carré égale 2.

Pratiquement, on peut avoir besoin d'une valeur approchée de $\sqrt{2}$ et il n'y a qu'à choisir, parmi les possibilités offertes par la calculatrice, celle qui convient au problème posé.

$\sqrt{2} \approx 1{,}414\ 213\ 562$

Définitions :

- Il existe des nombres, révélés par la géométrie, dont les carrés sont des nombres entiers.
  Si A mesure l'aire d'un carré, le nombre qui mesure sont côté est donné par : $\sqrt{A}$
  Le signe $\sqrt{}$ s'appelle le **radical** de A.
- Ainsi, la **racine carrée** d'un nombre positif A est **le nombre positif** x, tel que $x^2 = A$.
  La racine carrée de A se note : $\sqrt{A}$
- Le calcul de $\sqrt{A}$ tantôt aboutit et tantôt non ; quand il n'aboutit pas, on a affaire à de nouveaux nombres, qui ne sont ni décimaux ni rationnels, et que de ce fait, on appelle **irrationnels**.

Remarques importantes :

1) Un nombre négatif n'a pas de racine carrée. Par exemple $\sqrt{-25}$ n'existe pas !
2) La racine carrée de 0 est 0 : $\sqrt{0} = 0$
3) Il ne faut pas confondre les deux problèmes suivants :
   « Calculer la racine carrée de 49 » et « trouver les nombres x tels que $x^2 = 49$ » !!!
   En effet, il existe deux nombres x, tels que $x^2 = 49$. Ces deux nombres sont 7 et -7.
   On dira que « 7 et -7 sont **des solutions de l'équation** $x^2 = 49$ »
   Mais $\sqrt{49} = 7$ car une racine carrée est un nombre **positif** !

Propriétés des racines carrées :

0) Si $a \geq 0$, on a : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ et $\sqrt{a^2} = a$

1) Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a : $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

2) Si $a \geq 0$ et $b > 0$, on a : $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

3) Si $a > 0$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$

♥ ♥ ♥

Ces propriétés découlent trivialement de la définition et des propriétés des puissances. Seulement la 3ème propriété mérite un peu d'attention.

En effet, on a à partir du membre de droite : $\dfrac{\sqrt{a}}{a} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \sqrt{\dfrac{a}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

Les deux extrémités de ces égalités permettent de conclure.

Remarque :
Généralement $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$. ☹

Deux calculs simples permettent de s'en convaincre :

$\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$ et $\sqrt{100-36} \neq \sqrt{100} - \sqrt{36}$

Exercice 1 :

Calculer lorsque c'est possible et donner, s'il y a lieu, le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

1) $\sqrt{144} =$

2) $\sqrt{\frac{49}{16}} =$

3) $-\sqrt{\frac{25}{64}} =$

4) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} =$

5) $\sqrt{-36} =$

6) $\sqrt{\frac{27}{75}} =$

7) $\sqrt{0{,}25} =$

8) $\sqrt{0{,}09} =$

Exercice 2 :

Calculer lorsque c'est possible et donner, s'il y a lieu, le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

1) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} =$

2) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} =$

3) $\sqrt{25-16} =$

4) $\left(\sqrt{2}\right)^2 =$

5) $\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{8}\right) =$

6) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} =$

7) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} =$

8) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} =$

9) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{48} =$

10) $\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{18} + \sqrt{32}\right) =$

Exercice 3 :

Calculer lorsque c'est possible et donner, s'il y a lieu, le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

1) $\left(\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}} \cdot \sqrt{\frac{4}{5}}\right) : \left(\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{9}}\right) =$

2) $\sqrt{8} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{\sqrt{32}}\right) =$

3) $(1{,}25)^2 - \sqrt{12{,}5} \cdot \sqrt{0{,}125} =$

4) $\sqrt{\dfrac{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}}} =$

5) $\sqrt{\frac{16}{81}} + \frac{5}{6} : \left(\frac{5}{27} \cdot \sqrt{\frac{27}{12}}\right) =$

2.2. Réduction de la racine carrée d'un naturel à sa plus simple expression

Les unités irrationnelles :
Puisque à chaque entier correspond sa racine carrée, qui est ou non irrationnelle, comme on peut le vérifier pour les quelques premiers nombres figurant ici avec leur racine carrée :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{n}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{8}$	3	$\sqrt{10}$

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\sqrt{n}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{15}$	4	$\sqrt{17}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{19}$	$\sqrt{20}$

et que chaque racine carrée peut toujours être matérialisée par une construction de géométrie, appelons « ***unités irrationnelles*** » des nombres tels que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, etc.

Réduction de la racine carrée :
De même qu'on peut simplifier une fraction, on peut simplifier une racine carrée en la ramenant à la ***plus petite unité irrationnelle possible***. Puisque les racines carrées sont compatibles avec la multiplication, on a vu que:

$$\text{Si } a \geq 0 \text{ et } b \geq 0\text{, on a : } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

Cela permet de simplifier une racine carrée quand elle « contient » un carré, comme par exemple, c'est le cas de 20. En effet on a que $20 = 4 \cdot 5$ et ainsi on peut écrire :

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

Autre exemple :

$$\sqrt{18} =$$

Réduction d'une somme de racines carrées :
Quand il est proposé de réduire une somme telle que : $S = 2\sqrt{5} - \sqrt{18} + 3\sqrt{20} + 4\sqrt{50} + \sqrt{8}$
On a le sentiment de n'y voir que des unités irrationnelles différentes, qui ne peuvent pas être comptées ensemble. Ce n'est qu'une impression ; en fait, $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{20}$ et $\sqrt{50}$ cachent des unités irrationnelles plus petites qui sont $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$.
On a :

$$\begin{aligned} S &= 2\sqrt{5} - \sqrt{18} + 3\sqrt{20} + 4\sqrt{50} + \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{5} - \sqrt{9 \cdot 2} + 3\sqrt{4 \cdot 5} + 4\sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 2} \\ &= 2\sqrt{5} - 3 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 4 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + 6\sqrt{5} + 20\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \\ &= 19\sqrt{2} + 8\sqrt{5} \end{aligned}$$

Définition :
La racine carrée d'un entier naturel est ***réduite*** à sa plus simple expression quand il ne reste sous le radical qu'un nombre ne comportant plus aucun facteur carré.

Exercice 1 :
Ecrire sous la forme la plus simple possible.

1) $\sqrt{12} =$

2) $\sqrt{27} =$

3) $\sqrt{16} =$

4) $\sqrt{48} =$

5) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} =$

6) $\sqrt{54} =$

7) $\sqrt{32} =$

8) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{27} =$

9) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{125} =$

10) $\sqrt{600} =$

11) $\sqrt{90} =$

12) $\sqrt{2000} =$

Exercice 2 :
Ecrire sous la forme la plus simple possible.

1) $\sqrt{75} + \sqrt{27} =$

2) $\sqrt{8} + 3\sqrt{98} =$

3) $\sqrt{24} + 2\sqrt{96} - 5\sqrt{54} =$

4) $\sqrt{27}\sqrt{45} =$

5) $\sqrt{75} + 5\sqrt{27} - 4\sqrt{3} =$

6) $\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{8}\right)^2 =$

7) $\left(5 + 2\sqrt{3}\right)^2 =$

8) $\left(\sqrt{2} + 3\right)\left(2\sqrt{12} - 1\right) =$

9) $\sqrt{2}\left(\sqrt{5} + 2\sqrt{8} + \sqrt{6}\right) =$

10) $\dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{6}}\sqrt{\dfrac{39}{48}} =$

11) $2\sqrt{32} - \sqrt{58} + 3\sqrt{20} + 4\sqrt{150} + \sqrt{27} =$

2.3 Racines cubiques :

De manière analogue aux racines carrées, on peut définir les racines cubiques. L'interprétation géométrique, dans le cas positif uniquement, est celle du volume d'un cube dont on cherche les arêtes.

Définitions :

- La **racine cubique** d'un nombre positif, négatif ou nul V est le nombre x, tel que $x^3 = V$
  La racine cubique de V se note : $\sqrt[3]{V}$
- Le calcul de $\sqrt[3]{V}$ tantôt aboutit et tantôt non ; quand il n'aboutit pas, on a affaire à des nombres **irrationnels**.

Remarques importantes :

1) Contrairement aux racines carrées, ***un nombre négatif possède une racine cubique*** !
   Par exemple $\sqrt[3]{-27} = -3$ car $(-3)^3 = -27$
2) La racine cubique de 0 est 0 : $\sqrt[3]{0} = 0$

Propriétés des racines cubiques :

0) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$ et $\sqrt[3]{a^3} = a$
1) $\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$
2) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ si $b \neq 0$

♥♥♥

Remarques :

- Ces propriétés découlent trivialement de la définition et des propriétés des puissances.
- La racine cubique n'est pas compatible avec l'addition et la soustraction.

Exercice 1 :

Calculer lorsque c'est possible et donner, s'il y a lieu, le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

1) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} =$

2) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{9}} =$

3) $\sqrt[3]{-\frac{64}{125}} =$

4) $\sqrt[3]{\frac{128}{250}} =$

5) $\sqrt[3]{\frac{128}{54}} =$

6) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{-4} =$

7) $\sqrt[3]{-5} \cdot \sqrt[3]{25} =$

8) $\sqrt[3]{\frac{9}{25}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{5}} =$

9) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{27}} =$

10) $\sqrt[3]{6^3} =$

Exercice 2 :
Calculer lorsque c'est possible et donner, s'il y a lieu, le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

1) $\sqrt[3]{3^4} \cdot \sqrt[3]{3^8} =$

2) $\dfrac{\sqrt[3]{3^4}}{\sqrt[3]{3}} =$

3) $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{4}} =$

4) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{5}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{50}} =$

5) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{100} =$

6) $\dfrac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{8 \cdot 27} - (2{,}5)^2 : 100 =$

7) $\sqrt[3]{10^6} + (0{,}1)^2 =$

8) $\sqrt[3]{\dfrac{-27}{8}} + 0{,}\overline{3} =$

2.3 Racines $n^{\text{ième}}$:

Par extension on peut donner la définition suivante :

Définition :
- La **racine $n^{\text{ième}}$** d'un nombre **a** est le nombre x, tel que $x^n = a$
  La racine $n^{\text{ième}}$ de **a** se note : $\sqrt[n]{a}$
- Le nombre **a** dont on veut extraire la racine s'appelle le **radicande**.
- Le nombre **n** est le **degré** de la racine.
- Si n est **pair** la racine n'est définie que pour un **radicande positif** et le résultat est un nombre positif.
- Si n est **impair** la racine est définie pour un radicande **positif, négatif ou nul.**

Propriétés des racines $n^{\text{ièmes}}$:

0) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ et $\sqrt[n]{a^n} = a$

1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ si $b \neq 0$

♥♥♥

Exercice 1 :
Calculer lorsque c'est possible et donner, s'il y a lieu, le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

1) $\sqrt[4]{-256} =$

2) $-\sqrt[4]{256} =$

3) $\sqrt[5]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{16}} =$

4) $\sqrt[8]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[8]{\frac{1}{128}} =$

5) $\sqrt[6]{\frac{2}{4}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{32}} =$

6) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5} =$

7) $\sqrt[4]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{16}} =$

8) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{2}} =$

Exercice 2 :
Calculer lorsque c'est possible.

1) $\sqrt[4]{225} \cdot \sqrt[4]{225} =$

2) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} =$

3) $\sqrt[10]{10} \cdot \sqrt[10]{10^9} =$

4) $\sqrt[4]{2^{16}} =$

5) $\sqrt[6]{64} =$

6) $\sqrt[6]{10^{60}} =$

7) $\sqrt[4]{6^8} =$

8) $\sqrt[5]{3^{15}} =$

2.4 Puissances et racines :

Considérons l'exemple suivant : $\sqrt[6]{7^{18}} = \sqrt[5]{7^3 \cdot 7^3 \cdot 7^3 \cdot 7^3 \cdot 7^3 \cdot 7^3} = \sqrt[6]{\left(7^3\right)^6} = 7^3$

On remarque : $\sqrt[6]{7^{18}} = 7^{\frac{1}{6} \cdot 18} = 7^{\frac{18}{6}} = 7^3$

Pour rendre cette manipulation aisée, la définition suivante vient naturellement et permettra de donner les dernières propriétés aux puissances et racines :

Définition :

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$$

(♣)

Propriétés :

1) $\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$ 2) $\left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p}$ 3) $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a}$

Remarques :

- La première motivation de la définition (♣) vient en réalité de la propriété 1). D'autre part elle rend les propriétés des puissances directement utilisables en combinaison avec les racines. Les propriétés 2) et 3) découlent alors de façon élémentaire.
- De manière analogue, la définition des puissances d'exposant négatif était en réalité motivée par la propriété du quotient.
- Il faut néanmoins se méfier des racines de degré pair mais de radicande négatif.
  On garantit donc ces propriétés valables pour des radicandes positifs.

Résumé des propriétés des puissances et racines :

Si a est b sont des nombres positifs on a :

$a^p \cdot a^q = a^{(p+q)}$	$\dfrac{a^p}{a^q} = a^{(p-q)} \quad (a \neq 0)$	$a^{-q} = \dfrac{1}{a^q} \quad (a \neq 0)$
$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p} \quad (b \neq 0)$	$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$	$\sqrt[q]{a \cdot b} = \sqrt[q]{a} \cdot \sqrt[q]{b}$ $\sqrt[q]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}} \quad (b \neq 0)$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$	$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a}$ $\left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p}$
$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$	$\left(\sqrt[q]{a}\right)^q = a$	$\sqrt[q]{a^q} = a$

Exercice 1 :
Ecrire sous la forme la plus simple et calculer lorsque c'est possible.

1) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{216}} =$

4) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$

2) $\sqrt[3]{\dfrac{2^6}{3^9}} =$

5) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\left(2^3\right)^{\frac{1}{9}}} =$

3) $\dfrac{\left(\sqrt[4]{7^3}\right)^8}{\sqrt[5]{7} \cdot \left(\sqrt{7}\right)^3} =$

6) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}\right) =$

Exercice 2 :
En utilisant la forme caractéristique, calculer et donner la réponse en notation scientifique :

1) $\sqrt{0{,}000049} =$

3) $\sqrt[4]{0{,}16 \cdot 10^{-2} \cdot 8{,}1 \cdot 10^{-7}} =$

2) $\sqrt[3]{125'000'000'000'000} =$

4) $\sqrt[3]{\dfrac{0{,}06 \cdot 10^{-2}}{4{,}8 \cdot 10^{-9}}} =$